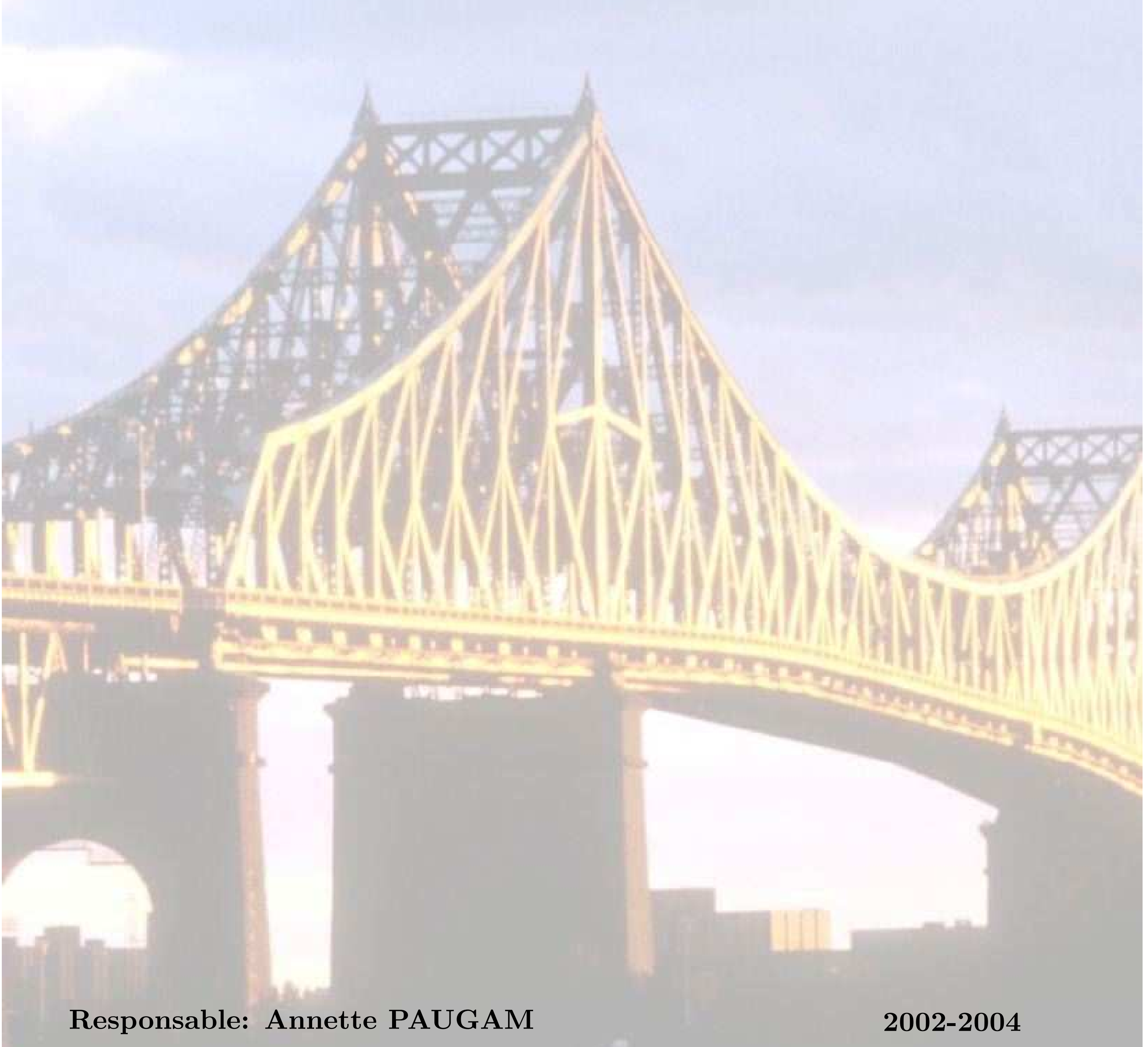
IREM de RENNES

DE LA TERMINALE À LA FAC :

LANGAGE ET EXIGENCES EN MATHÉMATIQUES



Responsable: Annette PAUGAM

2002-2004

IREM de RENNES

DE LA TERMINALE À LA FAC :
LANGAGE ET EXIGENCES EN MATHÉMATIQUES

Responsable : Annette PAUGAM

2002-2004

PARTICIPANTS :

Françoise Chauvet	Lycée Sévigné	Cesson Sévigné
Katia Gourdel	Lycée Bertrand D'Argentré	Vitré
Gérard Guidevay	UFR maths	Université de Rennes I
Joëlle Jamil	Lycée Sévigné	Cesson Sévigné
Marie-Pierre Lebaud	UFR maths	Université de Rennes I
Annette Paugam	UFR maths	Université de Rennes I
Véronique Pelgrin	Lycée Bertrand D'Argentré	Vitré

Contact : sec-irem@univ-rennes1.fr

Introduction

Notre groupe s'est donné pour but de rechercher des moyens d'aplanir les difficultés liées aux différences entre le lycée et l'université.

Ce travail a débuté par un état des lieux : comparaison des programmes, comparaison du vocabulaire utilisé dans les manuels et les polycopiés, liste pêle-mêle des difficultés que rencontrent nos étudiants :

- difficultés liées au vocabulaire et au langage ;
- difficultés liées au contenu ;
- difficultés liées à la méthode de démonstration ;
- difficultés liées aux exigences en mathématiques.

À la suite de ce bilan, nous sommes tombés d'accord sur un premier travail sur l'implication et son vocabulaire. Sur ce sujet, nous avons d'abord élaboré un test sur l' implication portant sur les différentes formulations des énoncés du type $A \Longrightarrow B$, puis pour comprendre plus précisément la nature des erreurs rencontrées, un test sur l'implication, dans le contexte d'une démonstration complète.
La question qui vient naturellement ensuite est la maîtrise des raisonnements par équivalence. Dans l'enseignement supérieur, une démonstration d'équivalence se fait très souvent, pour des raisons de complexité, par double implication. C'est rarement le cas au lycée. De ce fait, les étudiants débutants ont tendance à penser que c'est plus simple de travailler avec des équivalences, avec tous les risques d'erreurs que cela comporte. Pour étudier ce problème, nous avons choisi le thème de la résolution d'équations, thème commun à tous les niveaux.

Un autre problème est crucial à l'université : l'usage des quantificateurs. Au lycée, les élèves prêtent souvent peu d'attention à un “pour tout n” ou un “il existe x”. Ils ont tendance à penser que l'essentiel est le calcul qui suit. Il devient primordial à l'université de bien comprendre l'importance de l'ordre des quantificateurs, en particulier pour la continuité et les différentes notions de convergence en analyse. On rencontre déjà au lycée les alternances de quantificateurs, pour la définition de la période ou du maximum d'une fonction, par exemple. Nous avons réalisé une fiche “tous pour un, un pour tous”, pour faire travailler lycéens et étudiants, avec une même fiche, sur ce genre d'énoncé.

Au cours de ces différentes activités, nous avons aussi échangé sur les problèmes posés par le calcul algébrique et, plus particulièrement, par la manipulation des inégalités. Cela nous a conduit à regarder la place des inégalités dans les programmes des différents niveaux. Puis nous avons discuté et proposé des règles minimales de manipulation d'inégalités, permettant aux élèves et aux étudiants de pratiquer quelques activités spécifiques sur ce thème.

La dernière activité que nous avons réalisée est d'une autre nature. Il s'agissait de trouver des erreurs dans des démonstrations déjà écrites. Cela nous a permis de voir sous un autre angle les problèmes déjà rencontré sur l'implication, l'équivalence, les quantificateurs et les inégalités. Nous avons aussi découvert en observant les élèves travailler, les difficultés qu'ils ont à bien concevoir la notion de suite et quelques confusions avec la notion de fonction.

N.B. Les expérimentations ont été réalisées avant la réforme du LMD. Précisons que les deux années de DEUG correspondent actuellement aux première et deuxième années de LICENCE (L1 et L2) et l'ancien niveau licence correspond maintenant à L3.

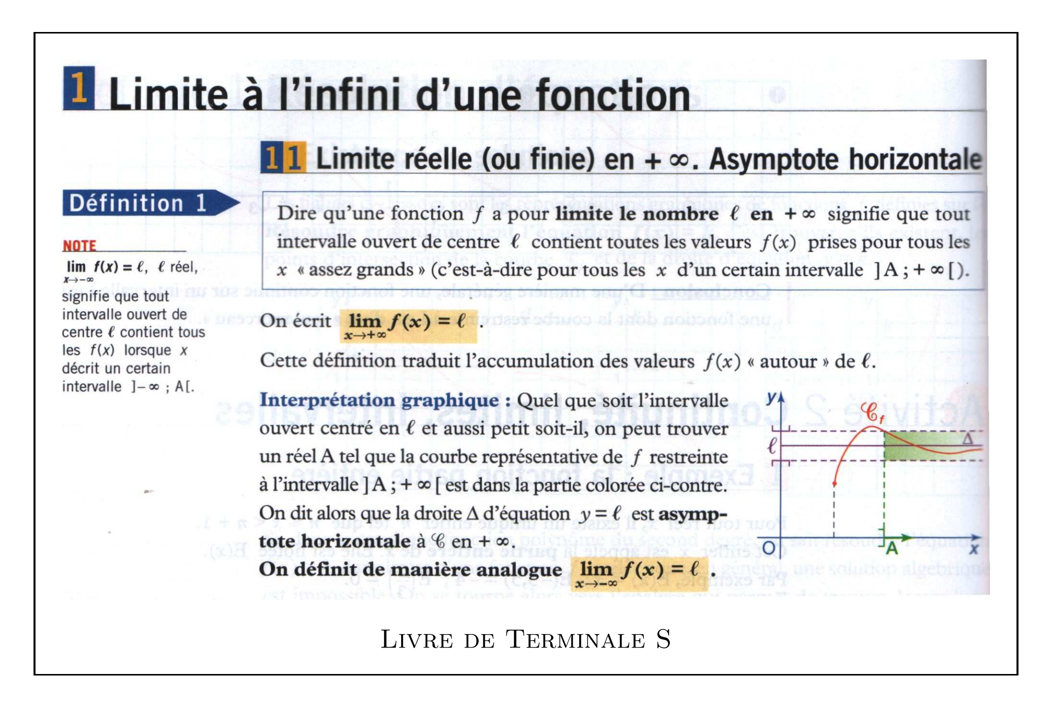
Chapitre 1

Etude de manuels scolaires et universitaires

Nous nous sommes, dans un premier temps, intéressés aux manuels scolaires (livres de Terminale S, programme 2002) et universitaires (DEUG 1ère année) et plus particulièrement aux formulations utilisées dans les définitions et théorèmes.

Les différences entre ces deux types d'ouvrages apparaissent au premier coup d'œil : utilisation des couleurs, de la mise en page avec d'un côté le cours, de l'autre des méthodes et des exercices d'application pour les livres de lycée, présentation plus classique dans les manuels du supérieur avec une suite de théorèmes suivis de démonstrations et d'exercices sans réelle utilisation de la couleur ni mise en évidence des méthodes.

On note également des différences dans les formulations. C'est ce point qui nous intéresse plus particulièrement ici. Par exemple, si l'on compare la définition d'une limite finie en $+\infty$, on observe que celle donnée en Terminale (c'est la première fois que les élèves rencontrent cette notion) est plus intuitive. Elle est expliquée au moyen des intervalles sous la forme d'une note sur le côté de la page et elle est illustrée par un dessin.



1 Limite à l'infini d'une fonction

1.1 Limite réelle (ou finie) en $+\infty$. Asymptote horizontale

Définition 1

Dire qu'une fonction f a pour **limite le nombre** ℓ **en** $+\infty$ signifie que tout intervalle ouvert de centre ℓ contient toutes les valeurs $f(x)$ prises pour tous les x « assez grands » (c'est-à-dire pour tous les x d'un certain intervalle $]A ; +\infty[$).

On écrit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.

Cette définition traduit l'accumulation des valeurs $f(x)$ « autour » de ℓ.

Interprétation graphique : Quel que soit l'intervalle ouvert centré en ℓ et aussi petit soit-il, on peut trouver un réel A tel que la courbe représentative de f restreinte à l'intervalle $]A ; +\infty[$ est dans la partie colorée ci-contre.

On dit alors que la droite Δ d'équation $y = \ell$ est **asymptote horizontale** à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

On définit de manière analogue $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$.

NOTE

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$, ℓ réel, signifie que tout intervalle ouvert de centre ℓ contient tous les $f(x)$ lorsque x décrit un certain intervalle $]-\infty ; A[$.

Livre de Terminale S

Par contre, la définition donnée en Deug est rigoureuse, mais apparait comme assez ésotérique pour des étudiants qui n'ont pas vraiment manipulé cette notion en Terminale. Dans l'exemple donné, les quantificateurs ne sont pas utilisés, mais ils ne sont pas bien loin. À l'université, on va demander aux étudiants de montrer qu'une certaine fonction a ℓ pour limite en $+\infty$ au moyen de cette définition, alors qu'au lycée ils calculent des limites de fonctions en $+\infty$ en utilisant des règles de comparaison, d'addition ou de composition. La transition s'avère un peu délicate pour bon nombre d'étudiants.

Définitions

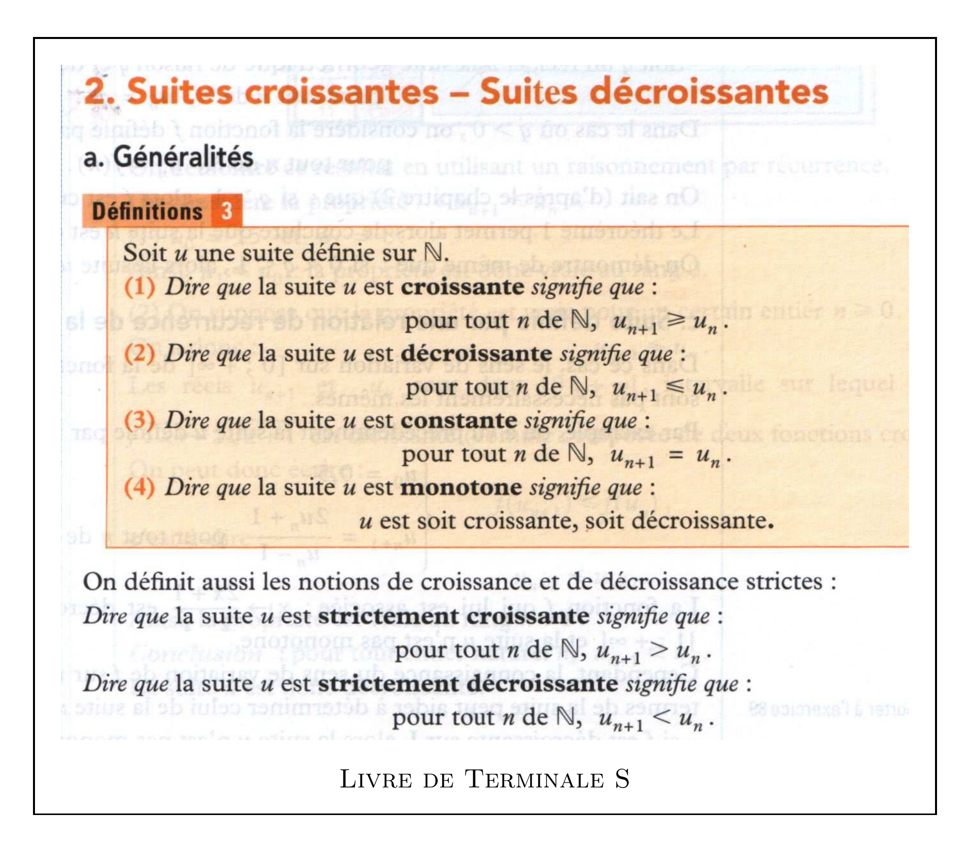
► Soit I l'un des intervalles $]-\infty, +\infty[$, $[a, +\infty[$, $]a, +\infty[$ où a est un nombre réel, et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Si ℓ est un nombre réel, on dit que f *a pour limite* ℓ *en* $+\infty$, ou encore que $f(x)$ *tend vers* ℓ *quand* x *tend vers* $+\infty$, si pour tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $r > 0$ ayant la propriété suivante :

$$(x \in I \text{ et } x > r) \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Cette propriété se note $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.

Livre de Deug

Regardons de plus près le vocabulaire employé pour les définitions en nous plaçant dans le cas des suites croissantes. La formulation la plus utilisée est "on dit que ... si", mais on trouve aussi beaucoup l'utilisation de l'auxiliaire "être". On voit cependant de plus en plus apparaître une formulation qui nous semble bien préférable : "Dire que ... signifie que...".



2. Suites croissantes – Suites décroissantes

a. Généralités

Définitions 3

Soit u une suite définie sur $\mathbb{N}$.

(1) *Dire que* la suite u est **croissante** *signifie que* :

pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} \geqslant u_n$.

(2) *Dire que* la suite u est **décroissante** *signifie que* :

pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} \leqslant u_n$.

(3) *Dire que* la suite u est **constante** *signifie que* :

pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n$.

(4) *Dire que* la suite u est **monotone** *signifie que* :

u **est soit croissante, soit décroissante.**

On définit aussi les notions de croissance et de décroissance strictes :

Dire que la suite u est **strictement croissante** *signifie que* :

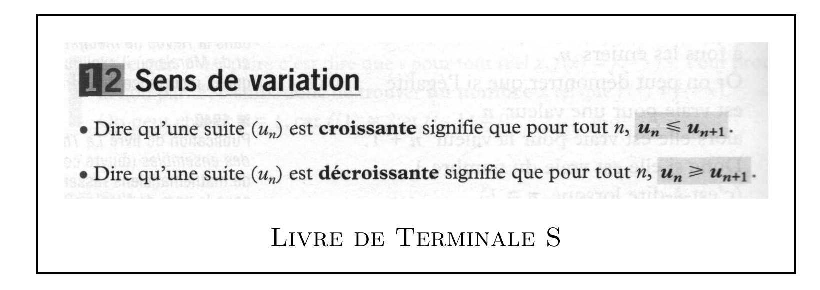
pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$.

Dire que la suite u est **strictement décroissante** *signifie que* :

pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$.

Livre de Terminale S

A noter, dans l'exemple suivant, qu'il n'est pas rappelé que l'indice n est un entier.



12 Sens de variation

- Dire qu'une suite (u_n) est **croissante** signifie que pour tout n, $u_n \leqslant u_{n+1}$.
- Dire qu'une suite (u_n) est **décroissante** signifie que pour tout n, $u_n \geqslant u_{n+1}$.

Livre de Terminale S

Les livres de Deug utilisent la formulation “on dit que . . . , si . . . ” ou (plus rarement) “on dit que . . . , si et seulement si . . . ”.

3.2 Monotonie

3.2.1 Suites réelles monotones

Définition Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

- On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **croissante** si et seulement si :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant u_{n+1}$$
- On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **décroissante** si et seulement si :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leqslant u_n$$
- On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **strictement croissante** si et seulement si :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n < u_{n+1}$$
- On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **strictement décroissante** si et seulement si :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} < u_n$$
- On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **monotone** si et seulement si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
- On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **strictement monotone** si et seulement si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

Livre de Deug

A noter, dans l’exemple suivant, le placement du “quel que soit n” (sans préciser qu’il est entier) après l’inégalité, formulation qui complique le passage à la négation.

► Supposons que (u_n) est une suite de nombres réels.
(u_n) est *croissante* si l’on a $u_{n+1} \geqslant u_n$ quel que soit n.
(u_n) est *strictement croissante* si l’on a $u_{n+1} > u_n$ quel que soit n.
On définit de même une suite *décroissante* et une suite *strictement décroissante*.

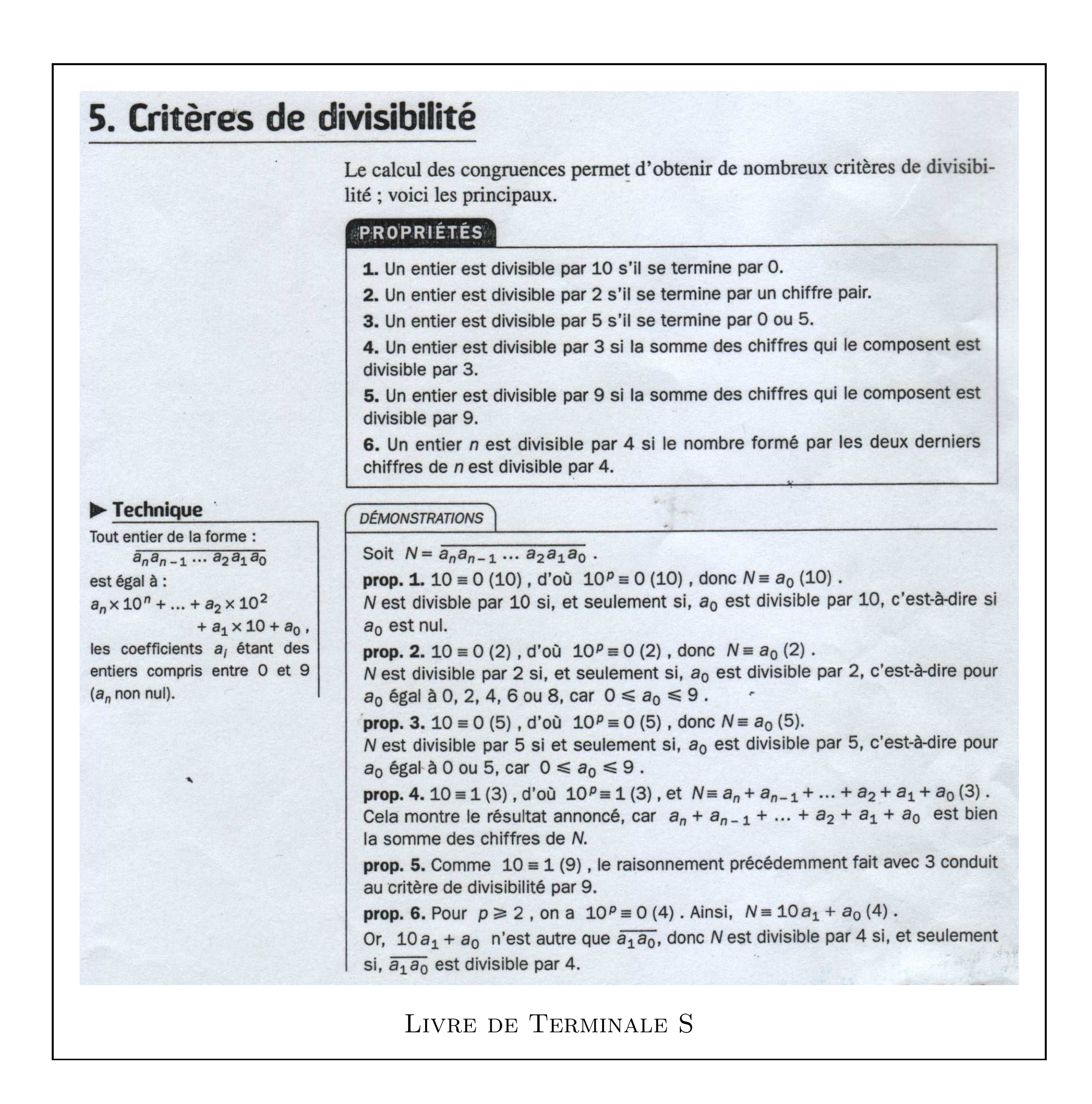
Livre de Deug

La formulation “Dire que . . . signifie que. . . ” nous a semblé la plus claire. Les termes “on dit que . . . si. . . ” peuvent tromper un élève ; c’est le fait que l’on a annoncé que l’on donnait une définition qui lui permettra de traduire qu’il y a en fait une équivalence entre le mot “croissante” et la proposition “pour tout entier n, $u_{n+1} \geq u_n$”. La formulation “on dit que . . . si et seulement si . . . ” perd cette ambiguïté ; mais il nous semble préférable de séparer le vocabulaire lié à une définition (où il n’y a rien à démontrer) du vocabulaire de démonstration.

D’une manière globale, on observe que le vocabulaire mathématique est plus varié dans les livres de Deug que dans ceux de Terminale. Le terme “car”, par exemple, se retrouve très rarement en secondaire dans les livres, alors qu’il sert couramment dans le supérieur lorsque

la justification nécessaire à une certaine propriété est simple. Il nous semble qu'un emploi varié des différents vocabulaires utilisés en démonstration permettrait à l'élève de mieux les assimiler et de se les approprier pour ses futurs écrits mathématiques.

On constate par ailleurs, dans certains ouvrages, un mélange dans l'utilisation des termes "si" et "si et seulement si". Dans l'exemple ci-dessous, les propriétés sont données avec un "si", alors que l'on démontre une équivalence. Ceci est bien sûr exceptionnel et l'enseignant doit signaler ce genre d'erreurs à ses élèves pour les exercer à garder un regard critique.



5. Critères de divisibilité

Le calcul des congruences permet d'obtenir de nombreux critères de divisibilité ; voici les principaux.

PROPRIÉTÉS

1. Un entier est divisible par 10 s'il se termine par 0.
2. Un entier est divisible par 2 s'il se termine par un chiffre pair.
3. Un entier est divisible par 5 s'il se termine par 0 ou 5.
4. Un entier est divisible par 3 si la somme des chiffres qui le composent est divisible par 3.
5. Un entier est divisible par 9 si la somme des chiffres qui le composent est divisible par 9.
6. Un entier n est divisible par 4 si le nombre formé par les deux derniers chiffres de n est divisible par 4.

▶ Technique

Tout entier de la forme : $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0}$ est égal à : $a_n \times 10^n + \dots + a_2 \times 10^2 + a_1 \times 10 + a_0$, les coefficients a_i étant des entiers compris entre 0 et 9 (a_n non nul).

DÉMONSTRATIONS

Soit $N = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0}$.

prop. 1. $10 \equiv 0\ (10)$, d'où $10^p \equiv 0\ (10)$, donc $N \equiv a_0\ (10)$.
N est divisble par 10 si, et seulement si, a_0 est divisible par 10, c'est-à-dire si a_0 est nul.

prop. 2. $10 \equiv 0\ (2)$, d'où $10^p \equiv 0\ (2)$, donc $N \equiv a_0\ (2)$.
N est divisible par 2 si, et seulement si, a_0 est divisible par 2, c'est-à-dire pour a_0 égal à 0, 2, 4, 6 ou 8, car $0 \leqslant a_0 \leqslant 9$.

prop. 3. $10 \equiv 0\ (5)$, d'où $10^p \equiv 0\ (5)$, donc $N \equiv a_0\ (5)$.
N est divisible par 5 si et seulement si, a_0 est divisible par 5, c'est-à-dire pour a_0 égal à 0 ou 5, car $0 \leqslant a_0 \leqslant 9$.

prop. 4. $10 \equiv 1\ (3)$, d'où $10^p \equiv 1\ (3)$, et $N \equiv a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1 + a_0\ (3)$.
Cela montre le résultat annoncé, car $a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1 + a_0$ est bien la somme des chiffres de N.

prop. 5. Comme $10 \equiv 1\ (9)$, le raisonnement précédemment fait avec 3 conduit au critère de divisibilité par 9.

prop. 6. Pour $p \geqslant 2$, on a $10^p \equiv 0\ (4)$. Ainsi, $N \equiv 10a_1 + a_0\ (4)$.
Or, $10a_1 + a_0$ n'est autre que $\overline{a_1 a_0}$, donc N est divisible par 4 si, et seulement si, $\overline{a_1 a_0}$ est divisible par 4.

Livre de Terminale S

Les étudiants critiquent le manque d'attrait des ouvrages du supérieur et particulièrement des polycopiés. La transition entre les manuels de lycée et ceux de Deug est trop brutale aussi bien dans le style de la présentation que dans la forme des énoncés. Les livres nouvellement parus de DEUG font des efforts pour aménager cette transition ; mais ce n'est pas le cas, pour l'instant, des polycopiés de cours fournis aux étudiants dans la plupart des universités. Voici, par exemple, la définition de limite finie en $+\infty$ donnée dans un cours de Deug 1ère année de l'université de Rennes 1 :

Soit $f: D \to \mathbb{R}$. Soit $(a, \ell) \in \overline{\mathbb{R}}^2$. On définit $\ell = \lim_a f$ lorsqu'un élément du couple (a, ℓ) est infini.

– si $a \in \mathbb{R}$ est adhérent à D et $\ell = +\infty$

$$\forall M > 0\,;\ \exists \delta > 0\,;\ \forall x \in D, \quad (|x - a| < \delta \Longrightarrow f(x) > M).$$

Cette définition est donnée sans aucune illustration ; elle regroupe plusieurs cas (suivant que a et ℓ sont égaux à $+\infty$ ou $-\infty$ ou finis). Ici, seul le cas de limite (finie) en $+\infty$ est reproduit pour comparer avec les exemples donnés en première page. Cette définition suppose un certain nombre de prérequis (“adhérence”, notation $\lim_a$, utilisation des quantificateurs) qu'un étudiant n'a pas eu le temps d'assimiler. Certes, après le baccalauréat, l'enseignement se spécialise et l'étudiant doit apprendre à se prendre en charge ; mais il faut une transition moins brutale.

Chapitre 2

Test sur des énoncés simples

L'idée du premier test est venue de la constatation de l'utilisation par certains élèves de l'implication à l'envers. Par exemple, pour démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme, un élève écrit : "si le quadrilatère est un parallélogramme, alors ses diagonales se coupent en leur milieu ; on va montrer que les diagonales se coupent en leur milieu. . . "

On a donc mis en œuvre un test sur l'implication avec différentes formulations et notations portant sur une propriété supposée connue des élèves et étudiants : "$a^2 = b^2 \Longleftrightarrow a = \pm b$".
Ils devaient dire si les énoncés proposés étaient vrais ou faux.
Ce test s'adressait à des élèves de 1ère S (une classe) et Term S (3 classes) ainsi qu'à des étudiants de DEUG 1ère année suivant un module de méthodologie du raisonnement scientifique (4 groupes de TD de DEUG MIAS, MASS et ENSI). Ce test est reproduit en annexe I à la fin du chapitre.
Dans le tableau suivant est indiqué le pourcentage de bonnes réponses en lycée et à l'université.

N°	Enoncés		Lycée	Fac
1	Si $a^2 = 25$, alors $a = 5$ ou $a = -5$	V	98	99
2	$a^2 = b^2$, donc $a = b$	F	91	100
3	Comme $a = b$, on a $a^2 = b^2$	V	98	100
4	$a^2 = 25$ car $a = -5$	V	80	83
5	Si $a = 5$ ou $a = -5$, alors $a^2 = 25$	V	98	99
6	$a = -5$ car $a^2 = 25$	F	98	98
7	Pour que $a^2 = 25$, il faut que $a = -5$	F	88	96
8	$a^2 = 25$ si $a = -5$	V	72	90
9	Pour que $a^2 = 25$, il est nécessaire que $a = -5$	F	80	99
10	$a = b$ donc $a^2 = b^2$	V	97	98
11	Comme $a^2 = b^2$, on a $a = b$	F	89	98
12	$a = -5 \Longrightarrow a^2 = 25$	V	91	99
13	Pour que $a^2 = 25$, il suffit que $a = -5$	V	80	90

Le premier énoncé "si $a^2 = 25$, alors $a = 5$ ou $a = -5$" a été choisi pour rappeler aux étudiants de ne pas oublier les deux cas, on souhaitait que le résultat mathématique traduit ne pose pas de difficultés ; il a été très bien réussi, ainsi que la réciproque (énoncé 5).
L'énoncé 2 "$a^2 = b^2$, donc $a = b$" est un peu moins réussi en lycée sans doute à cause de l'utilisation de variables et non de valeurs. C'est également le cas de l'énoncé 11.
Les énoncés 3 et 10 "Comme $a = b$, on a $a^2 = b^2$" et "$a = b$ donc $a^2 = b^2$" n'ont pas posé de problèmes aussi bien en lycée qu'en fac.
L'énoncé 12 utilise le signe $\Longrightarrow$ qui n'est normalement pas connu en lycée, mais le nombre de bonnes réponses reste correcte.

Les énoncés 7, 9 et 13, portant sur les termes "il faut", "il est nécessaire" et "il suffit" , ont posé quelques difficultés en lycée, ce qui est normal car ces termes sont peu usités.

La surprise est venue des énoncés 4 et 8 : "$a^2 = 25$ car $a = -5$" et "$a^2 = 25$ si $a = -5$" : **les élèves semblent conditionnés par la structure "hypothèse(s)" puis "conclusion".**
Une autre explication à ces deux erreurs est que les étudiants se sont dits qu'on n'avait pas supposé que $a = -5$ donc la proposition était fausse. Il n'y a alors pas d'erreur de

compréhension des termes, mais de l'exercice proposé. Pour pallier à cela, un test sera fait portant sur une démonstration complète.

La deuxième partie de ce test demandait de trouver les énoncés "signifiant la même chose" que "On peut dire que $a^2 = 25$ puisque $a = -5$." Le tableau suivant indique les pourcentages d'élèves ou étudiants ayant donné l'énoncé correspondant comme réponse, la valeur ε signifie que l'énoncé a été cité, mais de manière marginale (moins de 5%).

N°	Enoncés	Lycée	Fac
1	Si $a^2 = 25$, alors $a = 5$ ou $a = -5$	ε	ε
3	Comme $a = b$, on a $a^2 = b^2$	ε	ε
4	$a^2 = 25$ car $a = -5$	81	81
5	Si $a = 5$ ou $a = -5$, alors $a^2 = 25$	10	25
6	$a = -5$ car $a^2 = 25$	ε	ε
7	Pour que $a^2 = 25$, il faut que $a = -5$	13.5	ε
8	$a^2 = 25$ si $a = -5$	53	68
9	Pour que $a^2 = 25$, il est nécessaire que $a = -5$	ε	ε
10	$a = b$ donc $a^2 = b^2$	0	0
12	$a = -5 \Longrightarrow a^2 = 25$	59	85
13	Pour que $a^2 = 25$, il suffit que $a = -5$	37	52

La réponse attendue est 4,8,12,13. Elle correspond aux énoncés équivalents à "$a = -5 \Longrightarrow a^2 = 25$." Cependant "signifie la même chose que" est volontairement vague ; on pouvait proposer les énoncés 5, 3 et 10 qui permettaient de démontrer le même résultat ; les deux derniers étant formulés de manière plus générale. Seul le 5 a été proposé de manière significative, sans doute parce que la valeur -5 y apparaissait explicitement.
72% des élèves et 70% des étudiants ont donné des réponses incluses dans $\{3, 4, 5, 8, 12, 13\}$.

Il faut remarquer également qu'un peu plus de la moitié des lycéens ou étudiants ayant donné faux les énoncés 4 et 8 les ont cependant cités comme ayant la même signification que "On peut dire que $a^2 = 25$ puisque $a = -5$." Il semble donc que les énoncés soient compris, mais que les élèves ont pensé que l'on n'avait pas forcément $a = -5$.
Pour lever ce doute, nous avons choisi de leur proposer des énoncés se situant dans le contexte d'une démonstration complète.

Annexe I

Test sur des énoncés simples

Soient a et b deux réels.
Pour chacun des énoncés suivants, indiquer par une croix s'il est VRAI ou FAUX.

N°	Enoncés	VRAI	FAUX	Je ne sais pas
1	Si $a^2 = 25$, alors $a = 5$ ou $a = -5$			
2	$a^2 = b^2$, donc $a = b$			
3	Comme $a = b$, on a $a^2 = b^2$			
4	$a^2 = 25$ car $a = -5$			
5	Si $a = 5$ ou $a = -5$, alors $a^2 = 25$			
6	$a = -5$ car $a^2 = 25$			
7	Pour que $a^2 = 25$, il faut que $a = -5$			
8	$a^2 = 25$ si $a = -5$			
9	Pour que $a^2 = 25$, il est nécessaire que $a = -5$			
10	$a = b$ donc $a^2 = b^2$			
11	Comme $a^2 = b^2$, on a $a = b$			
12	$a = -5 \Longrightarrow a^2 = 25$			
13	Pour que $a^2 = 25$, il suffit que $a = -5$			

Trouver les numéros des énoncés qui signifient la même chose que

"On peut dire que $a^2 = 25$, puisque $a = -5$."

Chapitre 3

A la recherche des expressions perdues

Nous avons constaté, lors de notre première expérimentation, que dans un texte court, les erreurs portaient surtout sur les rédactions "inversées" de l'implication (rédigées avec "il suffit", "puisque", "car") et qu'au niveau de l'université les principales erreurs se trouvaient surtout sur le mot "car". Partant de là, nous avons émis l'hypothèse que cette erreur était due au fait que la phrase proposée se trouvait hors contexte et qu'en langage courant le "car" sous-entend que la proposition qui suit est vraie.
Par exemple les phrases :

S'il pleut, je prends mon parapluie
Je prends mon parapluie car il pleut
Je prends mon parapluie puisqu'il pleut
Pour que je prenne mon parapluie, il suffit qu'il pleuve

ont des sens différents, le "car" ou le "puisque" rendant "beaucoup plus certain" le fait de pleuvoir.
En conséquence, nous avons décidé de tester les mêmes expressions mais dans le contexte d'une démonstration longue.

1. Le test en 1ère S

La première expérimentation (voir annexe II en fin de chapitre) s'est faite, en 1ère S, sur une démonstration de géométrie utilisant deux énoncés ressemblants du point de vue des mots et presque réciproques l'un de l'autre :

Si une droite est perpendiculaire à un plan, elle est orthogonale à toutes les droites du plan.
Si une droite est orthogonale à deux droites concourantes d'un plan, elle est perpendiculaire à ce plan.

Cette démonstration utilisait l'expression "il suffit" dont nous voulions tester la confusion avec "il faut" et une justification, en fin de démonstration, introduite par le mot "car".

1.1. Expression marquant une conclusion

Nous analysons d'abord la quatrième expression où l'on attendait un terme comme "ainsi" :

La droite (AM) est orthogonale à (BC) CAR une droite perpendiculaire à un plan est orthogonale à toutes les droites de ce plan.
COMME le triangle ABC est rectangle en B, la droite (BC) est perpendiculaire à (AB).

AINSI la droite (BC) est orthogonale aux droites (AM) et (AB) ; les droites (AM) et (AB) sont sécantes,

59% ont utilisé une expression correcte telle que : AINSI, ALORS, DONC, D'OÙ

12% ont utilisé l'expression DE PLUS, ils n'ont pas vu que la phrase "la droite (BC) est orthogonale aux droites (AM) et (AB)" résumait les deux pas de démonstration précédents.

29% ont fait des erreurs importantes ; ils ont utilisé un des mots suivants : COMME, PUISQUE, SI. Pour ces élèves, le fait que (AB) et (AM) soient sécantes est une conséquence de leur orthogonalité respective avec (BC).

On a pu lire par exemple :

PUISQUE la droite (BC) est orthogonale aux droites (AM) et (AB) ; les droites (AM) et (AB) sont sécantes.

1.2. Résultat du “il suffit”

Notre test portait sur une formulation différente d’un théorème de 1ère S : *si une droite est orthogonale à deux droites sécantes d’un plan, alors elle est perpendiculaire à ce plan.*
Dans le test, ce théorème était attendu sous la forme :

Pour qu’une droite soit perpendiculaire à un plan, IL SUFFIT qu’elle soit orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

56% des élèves ont utilisé “il suffit” et 44% “il faut”. Cette deuxième formulation est très peu utilisée en 1ère S, ce qui peut expliquer le taux relativement modeste de réussite.

1.3. Les trois dernières expressions

La fin de la démonstration était rédigée de manière à avoir une justification finale :

PAR CONSÉQUENT (BC) est perpendiculaire au plan (ABM) et DONC (BC) est perpendiculaire à la droite (BM) PUISQUE (BM) est contenue dans le plan (ABM).

41% ont des combinaisons correctes.
59% ont des erreurs portant sur la dernière expression, les deux dernières ou sur la totalité des expressions. A la place du PUISQUE ou du CAR attendus au dernier mot , ils ont utilisé les expressions suivantes : D’OÙ, DONC, PAR CONSÉQUENT, ET, . . .

On a donc pu lire par exemple :

DONC (BC) est perpendiculaire au plan (ABM) et PAR CONSÉQUENT (BC) est perpendiculaire à la droite (BM) D’OÙ (BM) est contenue dans le plan (ABM).

2. Le test en DEUG

L’expérience faire en 1ère S a montré que les élèves étaient peu habitués à l’emploi d’un “car” dans la dernière phrase d’une démonstration, de nombreux élèves l’ayant remplacé par un “donc”, malgré le peu de sens que cela donnait à ce point de la démonstration.
Aussi nous avons voulu voir si les étudiants étaient plus à l’aise par rapport à la position de cette implication “inversée” dans un texte de démonstration. C’est dans cet esprit que nous avons conçu la démonstration à trous : “polynômes de Lagrange”, pour le module d’algèbre linéaire de première année. Cette démonstration contenait deux “car”, un en début de texte, l’autre introduisant la dernière proposition de notre démonstration.
Ce test a été expérimenté dans quatre groupes de DEUG MIAS première année, un petit groupe ENSI deuxième année, un groupe de licence pluridisciplinaire. On trouve la fiche testée en annexe III en fin de chapitre.

2.1. Analyse du premier paragraphe : “Il suffit....car”

Analysons d’abord les mots de liaison utilisés dans le premier paragraphe.
Nous présenterons en tableau, les différentes tournures choisies par les étudiants, en rassemblant celles qui ont à peu près la même signification.
Une proportion importante d’étudiants (73%) a employé une combinaison correcte d’expressions, si l’on ne tient pas compte des erreurs de ponctuation. De manière plus détaillée :

Comme/ Puisque/	$\mathbb{R}_3[X]$ est un espace vectoriel de dimension 4, pour prouver que la famille $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$,
il suffit de	vérifier qu’elle est libre,
En effet/ car/ puisque	dans un espace vectoriel de dimension 4, toute famille libre de 4 vecteurs est une base de cet espace.

Quelques étudiants, **6%**, ont remplacé le "car" par un mot moins approprié, tel que "et" ou "or", sans inverser toutefois la justification finale. Il est fréquent dans la conversation courante d'entendre pour conclure un "et" à la place d'un "donc", ce qui est acceptable ; tandis qu'un "et " ne peut pas remplacer un "car". Le mot "or" aurait pu convenir en inversant l'ordre des phrases. On a pu voir :

Comme/ Puisque	$\mathbb{R}_3[X]$ est un espace vectoriel de dimension 4, pour prouver que la famille $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$,
il suffit de	vérifier qu'elle est libre,
et/or	dans un espace vectoriel de dimension 4, toute famille libre de 4 vecteurs est une base de cet espace.

Seulement **8,6%** d'étudiants ont inversé la justification finale. Pour ces étudiants le résultat général du cours semble être une conséquence du cas particulier étudié dans l'exercice, à moins que cette erreur ne soit due à une mauvaise compréhension des mots comme *ainsi, donc, par conséquent*, introduisant une conclusion. Heureusement ces étudiants sont peu nombreux. Ils ont écrit :

4.6% d'étudiants avec "il suffit"

Comme/ Puisque	$\mathbb{R}_3[X]$ est un espace vectoriel de dimension 4, pour prouver que la famille $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$,
il suffit de	vérifier qu'elle est libre,
ainsi/ donc/ par conséquent	dans un espace vectoriel de dimension 4, toute famille libre de 4 vecteurs est une base de cet espace.

4% d'étudiants avec "il faut"

Comme/ Puisque/Si	$\mathbb{R}_3[X]$ est un espace vectoriel de dimension 4, pour prouver que la famille $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$,
il faut	vérifier qu'elle est libre,
ainsi/ donc/ par conséquent	dans un espace vectoriel de dimension 4, toute famille libre de 4 vecteurs est une base de cet espace.

Les **15%** d'étudiants qui ont inversé l'implication en remplaçant "il suffit" par "il faut" se sont partagés sur la justification finale. Cette erreur est difficile à faire comprendre lorsque, comme dans cette démonstration, les propositions en jeu sont équivalentes. C'est le contexte qui permet de choisir et cela nécessite une bonne compréhension du texte.

Comme/ Puisque/ Si	$\mathbb{R}_3[X]$ est un espace vectoriel de dimension 4, pour prouver que la famille $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$,
il faut	vérifier qu'elle est libre,
puisque/en effet/ (5%) or/de plus/ (6%), ainsi (4%)	dans un espace vectoriel de dimension 4, toute famille libre de 4 vecteurs est une base de cet espace.

On peut remarquer que sur ce paragraphe, situé en début de démonstration le taux de réussite est assez bon. Il faut dire que cette expérience était au second semestre et le premier semestre comporte un module de méthodologie dans lequel on insiste sur le vocabulaire utilisé en démonstration.

2.2. La justification finale

La suite du texte était rédigée de telle manière que la proposition finale soit une justication de ce qui précédait.

Soient λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 des nombres réels tels que

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 + \lambda_4 P_4 = 0.$$

Or, on sait que **si** P est le polynôme nul, **alors** pour tout a réel, $P(a) = 0$.
D'où, en prenant $X = 0$ on obtient

$$\lambda_1.0 + \lambda_2.0 + \lambda_3.0 - 6\lambda_4 = 0.$$

Donc $\lambda_4 = 0$.
De même en prenant successivement $X = 1$, on trouve
$\lambda_3 = 0$, puis $X = 2$, $\lambda_2 = 0$, enfin $X = 3$, $\lambda_1 = 0$.
Par conséquent $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$.

Ainsi ces quatre polynômes forment une base de $\mathbb{R}_3[X]$ **car** ils forment une famille libre de $\mathbb{R}_3[X]$.

La phrase finale donnait la conclusion avec sa justification et la réussite pour cette justification a été beaucoup moins importante qu'au début du texte : 55% au lieu de 79% pour la justification dans le premier paragraphe. Rappelons que seulement 41% d'élèves avaient réussi, en 1ère S, pour une justification introduite par un "car", en fin de texte. Ceci montre les progrès réalisés par les étudiants au fil des années !

55% d'étudiants avec "car"

Ainsi/ Par conséquent/ D'où/ Alors/ En effet	ces quatre polynômes forment une base de $\mathbb{R}_3[X]$
car/puisque/ comme/ en effet	ils forment une famille libre de $\mathbb{R}_3[X]$.

13.5% d'étudiants avec "et"

Ainsi/ Par conséquent/ D'où/ Donc	ces quatre polynômes forment une base de $\mathbb{R}_3[X]$
et	ils forment une famille libre de $\mathbb{R}_3[X]$.

31.5% d'étudiants avec "donc"

Ainsi/ Par conséquent/ Donc/ Et/ En effet/ Puisque	ces quatre polynômes forment une base de $\mathbb{R}_3[X]$
donc/ d'où/ alors/ par conséquent	ils forment une famille libre de $\mathbb{R}_3[X]$.

Pour expliquer les différences de performances entre ces deux "rédactions inversées", on peut émettre deux hypothèses :

- La place en début ou en fin de texte :
  - La consigne de ne pas employer deux fois la même expression limitait sans doute trop pour l'étudiant le choix d'expressions en fin de texte.
  - La fatigue en fin d'exercice ne l'encourageait pas à s'attarder sur ce choix à faire.
- La nature de la dernière proposition :
  - Le fait qu'avec un "donc", la dernière proposition, sortie du contexte, est vraie.
  - Une imprégnation forte du fait qu'en dimension n un système libre de n vecteurs forme une base (c'est une équivalence et cela devient une "évidence".) Ceci peut expliquer la fréquence de l'emploi du "et" à la place du "car".

Pour voir si les deux dernières hypothèses étaient fondées, nous avons renouvelé le test en fin d'année. Le nombre d'expressions manquantes a été réduit. La démonstration se termine encore par une justification. Les propositions utilisées rendaient plus difficile l'erreur de remplacer le "car" par "et" ou par "donc". Le dernier paragraphe comporte également l'expression "il suffit" :

> On en déduit $\mathrm{Im}(u) = \mathbb{R}_n[X]$. **Par conséquent** u est surjective, donc c'est un isomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$, **car**, pour qu'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie soit un isomorphisme, **il suffit** qu'il soit surjectif ou bien injectif.

Voir la fiche en annexe IV en fin de chapitre.

On constate sur ce texte, que le "car", en fin de texte, a été moins remplacé par un "donc" **(7,5%)** que dans l'expérience précédente, **(31%)**. Par contre cette erreur se trouvait avec la même fréquence en début de texte **(8%)** que dans l'expérience précédente.

Cependant les tournures correctes avec “car” ont été peu fréquentes **(40%)**. Le niveau est comparable à celui observé en 1ère S.

Pour ce qui est de l’emploi de “il suffit”, on constate aussi une moins bonne performance, à niveau égal, lorsque cette expression est située en fin de texte.
Au milieu de la démonstration de 1ère S, le taux de succès était de **55%**. Dans le premier test, à l’université, en début de texte on a obtenu un taux de réussite de **85%**. Mais pour le dernier test, fait en fin d’année, situé en fin de texte, le taux de réussite est redescendu à **62%**.

Il semble donc que l’usage correct du vocabulaire d’implication dépende de nombreux facteurs :

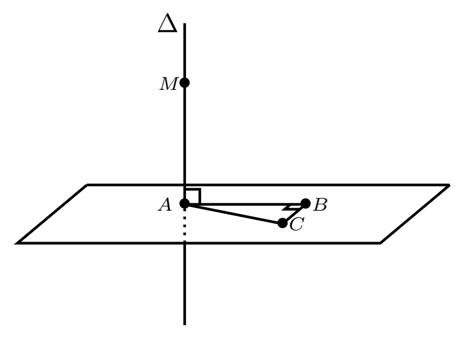
- La difficulté du contexte (géométrie dans l’espace en 1ère, algèbre linéaire en DEUG1 et propriétés des applications linéaires moins maîtrisées, au moment du test, que la notion de base)
- La difficulté à maîtriser une rédaction inhabituelle du type “conclusion car hypothèse”.
- La difficulté de comprendre l’ensemble d’un texte et pas seulement une phrase isolée de son contexte.
- La difficulté de choisir, quand il y a équivalence, le sens de l’implication utile pour la démonstration.
- La fatigue (milieu ou fin de démonstration).

Toutes ces constatations demandent à être affinées. Il reste à concevoir des activités permettant de remédier aux difficultés constatées.

Annexe II

A la recherche des expressions perdues - Niveau lycée

On considère un triangle ABC rectangle en B et Δ la droite perpendiculaire au plan (ABC) et passant par A. Soit M un point de la droite Δ distinct de A. Démontrer que les droites (BM) et (BC) sont perpendiculaires.



Voici une démonstration incomplète de cet exercice : il y manque des "expressions de liaison" figurant dans la liste ci-dessous.

Expression		ainsi	alors	car	comme	de plus	donc	d'où
N°	1	2	3	4	5	6	7	8

Expression	et	il faut	il suffit	or	par conséquent	puisque	si
N°	9	10	11	12	13	14	15

Remarques :

- Une telle expression peut ne contenir aucun mot comme la numéro 1 ! !
- On essaiera de ne pas utiliser la même expression plusieurs fois.

L'exercice consiste à trouver les expressions manquantes et à les placer correctement.

La droite (AM) est orthogonale à (BC) .... une droite perpendiculaire à un plan est orthogonale à toutes les droites de ce plan.

.... le triangle ABC est rectangle en B, ... la droite (BC) est perpendiculaire à (AB).

.... la droite (BC) est orthogonale aux droites (AM) et (AB) ; les droites (AM) et (AB) sont sécantes.

Or, pour qu'une droite soit perpendiculaire à un plan , ... qu'elle soit orthogonale à deux droites sécantes de ce plan. .... (BC) est perpendiculaire au plan (ABM) et .... (BC) est perpendiculaire à la droite (BM) .... (BM) est contenue dans le plan (ABM).

Annexe III

A la recherche des expressions perdues - Niveau DEUG

Polynômes de Lagrange

Montrer que les polynômes

$$P_1(X) = X(X-1)(X-2), \quad P_2(X) = X(X-1)(X-3),$$
$$P_3(X) = X(X-2)(X-3), \quad P_4(X) = (X-1)(X-2)(X-3)$$

forment une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

Voici une démonstration incomplète de cet exercice : il y manque des "expressions de liaison" figurant dans la liste ci-dessous.

Expression		ainsi	alors	car	comme	de plus	donc	d'où
N°	1	2	3	4	5	6	7	8

Expression	et	il faut	il suffit	or	par conséquent	puisque	si	en effet
N°	9	10	11	12	13	14	15	16

Remarques :

- Une telle expression peut ne contenir aucun mot comme la numéro 1 ! !
- On essaiera de ne pas utiliser la même expression plusieurs fois.

L'exercice consiste à trouver les expressions manquantes et à les placer correctement.

.... $\mathbb{R}_3[X]$ est un espace vectoriel de dimension 4, pour prouver que la famille $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$, ... vérifier qu'elle est libre.. ...., dans un espace vectoriel de dimension 4, toute famille libre de 4 vecteurs est une base de cet espace.
Soient λ_1, λ_2, λ_3 et λ_4 des nombres réels tels que

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 + \lambda_4 P_4 = 0.$$

............, on sait que, ... P est le polynôme nul, ... pour tout réel a, $P(a) = 0$.
........., en prenant $X = 0$, on obtient $\lambda_1.0 + \lambda_2.0 + \lambda_3.0 + \lambda_4.(-6) = 0$. .... $\lambda_4 = 0$.

De même, en prenant successivement $X = 1$, on trouve $\lambda_3 = 0$, puis $X = 2$, $\lambda_2 = 0$, enfin $X = 3$, $\lambda_1 = 0$. .... $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$.
.... ces quatre polynômes forment une base de $\mathbb{R}_3[X]$, ... ils forment une famille libre de $\mathbb{R}_3[X]$.

Annexe IV

A la recherche des expressions perdues - Niveau DEUG

Soit P appartenant à l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n.
On pose $u(P) = P' + P$.
Montrer qu'on définit ainsi un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
Déterminer la matrice de u dans la base $(1, X, X^2, \dots, X^n)$.
Montrer que u est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Voici une démonstration incomplète de cet exercice : il y manque des "expressions de liaison" figurant dans la liste ci-dessous.

Expression		ainsi	alors	car	comme	de plus	donc	d'où
N°	1	2	3	4	5	6	7	8

Expression	et	il faut	il suffit	or	par conséquent	puisque	si	en effet
N°	9	10	11	12	13	14	15	16

Remarques :

- Une telle expression peut ne contenir aucun mot comme la numéro 1 ! !
- On essaiera de ne pas utiliser la même expression plusieurs fois.

L'exercice consiste à trouver les expressions manquantes et à les placer correctement.

Tout d'abord, ...deg(P') $<$ deg(P), le degré de $u(P)$ est égal au degré de P. ; .... $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on en déduit $u(P) \in \mathbb{R}_n[X]$. De plus

$$u(P_1 + P_2) = (P_1 + P_2)' + (P_1 + P_2) = P_1' + P_1 + P_2' + P_2 = u(P_1) + u(P_2)$$

et

$$u(\lambda P) = (\lambda P)' + (\lambda P) = \lambda(P' + P) = \lambda u(P).$$

.... u est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Pour obtenir les colonnes de la matrice M de u dans la base $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$, il suffit de calculer les images par u des polynômes de cette base :

$$u(1) = 1, u(X) = X + 1, u(X^2) = X^2 + 2X, \ldots, u(X^n) = X^n + nX^{n-1}.$$

On obtient

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 3 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & n-1 & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & 1 & n \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs colonnes de la matrice de u forment un système de générateurs de Im(u). De plus, ce système de générateurs étant échelonné inférieurement, c'est un système libre. Il est formé de $n+1$ vecteurs dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ de dimension $n+1$. C'est............une base et en particulier un système de générateurs de $\mathbb{R}_n[X]$. On en déduit Im$(u) = \mathbb{R}_n[X]$. .... u est surjective, donc c'est un isomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$, ..., pour qu'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie soit un isomorphisme ....qu'il soit surjectif ou bien injectif.

Chapitre 4

Sur la résolution des équations avec radicaux

Au lycée, les élèves résolvent des systèmes d'équations linéaires, généralement par substitution, et ils ne voient pas l'importance de vérifier que les valeurs obtenues pour les inconnues sont effectivement solutions du système (ceci est d'autant plus vrai que les systèmes étudiés ont en général une solution unique). Pour les équations du second degré, la situation est encore plus simple, puisqu'il suffit d'appliquer des formules donnant toutes les solutions.
Dans ces deux situations, la rédaction se fait à l'aide d'implications (vocabulaire du genre "on obtient") qui sont en réalité des équivalences, ce que l'on peut ignorer sans conséquence grave dans ces deux cas.

Par contre, pour la résolution d'équations avec radicaux, il n'est pas toujours aisé de procéder par équivalences car le risque est grand d'oublier certaines informations. Les élèves raisonnent donc souvent par implications, mais pensent faire des équivalences et négligent donc de vérifier la validité des solutions trouvées. Un test, basé sur la résolution fausse d'une équation avec radical, a donc été proposé à des étudiants de DEUG 2 ; il leur était demandé de critiquer la rédaction donnée.

Après ce test, les membres du groupe ont proposé leurs propres solutions dont l'analyse a permis de se mettre d'accord sur quelques règles à respecter lors de la rédaction de solutions pour ce type de problème.

1. L'expérimentation avec des étudiants

Le texte suivant a été proposé à 13 étudiants de DEUG 2e année MIAS et SM préparant le concours national d'entrée dans les grandes écoles d'ingénieurs.

> Le problème : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{x^2-2x} = x-3$.
>
> Que pensez-vous du raisonnement suivant :
>
> *La racine carrée doit être définie donc $x^2-2x \geq 0$, d'où $x \in]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$. On élève au carré et on obtient $x^2-2x = (x-3)^2 = x^2-6x+9$ d'où $x = 9/4$, or $9/4 \geq 2$, donc l'équation a une unique solution qui est $x = 9/4$.*

3 ÉTUDIANTS ONT TROUVÉ L'ERREUR :
L'un d'entre eux regarde si la solution trouvée est bien solution de l'équation de départ.

→ En vérifiant dans l'équation $x = 9/4$ $\quad \sqrt{\frac{81}{16}-\frac{9}{2}} = \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$
$x-3 = \frac{9}{4}-3 = -\frac{3}{4}$. Donc $x = \frac{9}{4}$ ne vérifie pas l'équation.
→ La valeur obtenue de x doit être supérieure à 3.

Les deux autres affirment directement qu'une racine étant positive, x doit être supérieur à 3, ce qui n'est pas le cas de $9/4$.

Une racine doit être positive donc $x-3 \geq 0$ $x \geq 3$ x ne peut pas appartenir à $]-\infty, 3[$.
Or $9/4 \in]-\infty, 3[$ donc $9/4$ n'est pas solution de l'équation

$\sqrt{x^2-2x} \geq 0$ donc il est nécessaire d'avoir $x-3 \geq 0$
soit $x \geq 3$
donc $x = \frac{9}{4}$ n'est pas solution de l'équation.

5 ÉTUDIANTS PENSENT QUE LE RAISONNEMENT EST JUSTE, après vérification des calculs à chaque ligne :

$x^2 - 2x = (x-3)^2 > 0$ car $x^2 - 2x \geq 0$
$x^2 - 6x + 9 = 0$ $\Delta = 0$ alors le polynôme admet une et une seule solution $x = 9/4$ appartenant à $[2, +\infty[$ d'où $9/4 \geq 2$ donc il n'y a qu'une unique solution $x = 9/4$. Le raisonnement est bon.

La racine carrée doit être définie donc $x^2 - 2x \geq 0$,
d'où $x \in]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$. **vrai**
On élève au carré et on obtient $x^2 - 2x = (x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$ d'où $x = 9/4$,**vrai**
or $9/4 \geq 2$, donc l'équation a une unique solution qui est $x = 9/4$.**vrai**
$x^2 - 2x - x^2 + 6x - 9 = 0$
$4x = 9$
$x = 9/4$

Les 5 autres étudiants estiment le raisonnement incorrect, mais parce qu'il manque des racines.

on a élevé l'équation au carré alors $x = \pm\sqrt{9/4} = \pm 3/2$

$x = 9/4$
$9/4 \geq 0 \Rightarrow x = \pm 3/2$ or $+3/2$ n'appartient pas à l'intervalle des solutions
$\Rightarrow$ unique solution $x = 3/2$

$x = 9/4$ n'est pas forcément une unique solution, car en élevant au carré, on peut avoir transformé une solution négative en solution positive

$x^2 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow x(x-2) \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$ OK
$x^2 - 6x + 9 = x^2 - 2x \Leftrightarrow 0 = 4x - 9 \Rightarrow x = 9/4 \geq 2$
Mais il faut également prendre la solution négative $x = -9/4 \leq 0$

$x^2 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow x(x-2) \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$ oui
$x^2 - 2x = (x-3)^2 = x^2 - 6x + 9 \Leftrightarrow x = 9/4 \geq 2$
il faut prendre en compte $-9/4$ aussi

Trois des étudiants ont vu et montré que la "solution" proposée était fausse.
Mais, pour ce faire, ils se contentent de constater que la valeur 9/4 trouvée ne convient pas :

- soit en vérifiant directement que 9/4 n'est pas solution (1 étudiant)
- soit en remarquant que, puisque $\sqrt{f(x)}$ est positif, si x_0 est solution, on doit avoir $x_0 - 3 \geq 0$, condition qui n'est pas vérifiée par 9/4 (2 étudiants)

Aucun étudiant n'a vu que l'élévation au carré "crée de nouvelles solutions" parce que "$a = b$" n'est pas équivalent à "$a^2 = b^2$".

2. Rédactions d'enseignants

A la suite de ce test, nous avons entamé une réflexion sur la façon de résoudre ce type d'équations et d'en rédiger la démonstration.
Chacun des membres du groupe a proposé une ou plusieurs rédactions d'une résolution de la même équation $\sqrt{x^2 - 2x} = x - 3$, reproduites en annexe V en fin de chapitre.

L'analyse des démonstrations proposées par les membres du groupe montre qu'il y a essentiellement deux types de rédactions :

a) par "implication/vérification" qui consiste à chercher les "solutions possibles", puis à vérifier si les valeurs trouvées sont effectivement des solutions.
b) par équivalences successives, consistant à remplacer l'équation par des équations équivalentes (i.e. ayant les mêmes solutions) jusqu'à obtenir une équation équivalente que l'on sache résoudre.

On peut y ajouter deux autres types de rédactions que nous n'étudierons pas :

c) par l'absurde,
d) par étude des cas.

Les différences entre les rédactions proposées (du type a) ou b)) consistent essentiellement en l'introduction ou non :

- d'une part, de l'ensemble de définition D de l'équation - que l'on peut raisonnablement définir comme étant l'intersection des domaines de définition des fonctions intervenant dans l'équation - qui, pour l'équation étudiée, est le domaine de définition de la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2 - 2x}$;
- d'autre part, de l'ensemble S des solutions de l'équation.

3. Quelques remarques sur l'ensemble de définition

On appelle ensemble de définition de l'équation $f_1(x) = f_2(x)$ l'intersection D des ensembles de définition D_1 de f_1 et D_2 de f_2.
Pour l'équation (E) : $\sqrt{x^2 - 2x} = x - 3$, on peut sans inconvénient majeur se passer de D parce que la raison pour laquelle $9/4$ n'est pas solution de (E) n'est pas que $9/4 \notin D$ (en fait $9/4 \in D$) mais que $9/4$ est solution d'une équation (E'), qui n'est pas équivalente à (E), obtenue en élevant (E) au carré (à savoir $x^2 - 2x = (x-3)^2$) ce qui a pour effet de faire disparaître la contrainte $x - 3 \geq 0$ et donc de faire apparaître la "fausse solution" $9/4$.

Dans la méthode par "implication/vérification", lors de la partie "vérification", on détecte que $9/4$ n'est pas solution parce que, pour $x = 9/4$, $x - 3$ n'est pas positif, donc ne peut pas être égal à une racine carrée.
Dans la méthode avec équivalence, c'est la condition $x - 3 \geq 0$ de la dernière équivalence qui permet d'écarter $9/4$.

On pourrait donc penser que l'introduction de l'ensemble de définition ne présente pas d'intérêt majeur. Mais l'étude d'autres équations montre qu'on ne peut pas toujours s'en passer comme dans l'exemple suivant :

Exemple :

$$(E_1) \qquad \sqrt{(x-1)(x-4)} = \sqrt{(x-2)(x-5)}$$

En voici une résolution par "implication/vérification" :
supposons que x soit solution de (E_1). Alors, en élevant au carré et en effectuant, on obtient :

$$x^2 - 5x + 4 = x^2 - 7x + 5$$

d'où $x = 3$. Ceci montre que $x = 3$ est la seule solution possible. Mais, pour $x = 3$, $(x-1)(x-4)$ vaut -2 donc $3 \notin D_1$, ensemble de définition de $x \mapsto \sqrt{(x-1)(x-4)}$. En fait, si D_2 est l'ensemble de définition de $x \mapsto \sqrt{(x-2)(x-5)}$, on a $3 \notin D_1 \cap D_2 = D$, ensemble de définition de (E_1).
Dans cette équation (E_1), en élevant au carré, on fait disparaître les contraintes du type $f(x) \geq 0$ dans les termes $\sqrt{f(x)}$, i.e. les contraintes portant sur D. Il en résulte qu'il peut apparaître de "fausses solutions" et l'obstacle pour qu'elles soient solutions de (E_1) est, cette fois, qu'elles peuvent ne pas appartenir à D.
En d'autres termes, le problème de fond pour la résolution de (E_1) est l'ensemble de définition.

Autre exemple :

$$\ln(2x) = \ln(x^2 - 1)$$

La méthode préconisée dans les manuels de lycée est du type suivant :

- on calcule $D = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 2x > 0 \text{ et } x^2 - 1 > 0\}$
- on résout dans $\mathbb{R}$ l'équation $2x = x^2 - 1$
- on élimine parmi les solutions obtenues dans l'équation précédente celles qui n'appartiennent pas à D.

Conclusion.

a) Dans tous ces exemples, la solution par "implication/vérification" fonctionne. Lors de la partie "vérification", on constate que les termes $\sqrt{f(x)}$ ou $\ln\big(f(x)\big)$ sont définis ou non pour les valeurs de x trouvées dans la partie implication. Il n'est pas nécessaire de déterminer complètement D, mais la référence à D reste sous-jacente.

b) De même, dans la méthode par équivalence, la référence à D est présente, même si D n'apparaît pas dans la rédaction :

i) Dans l'équation $\sqrt{x^2 - 2x} = x - 3$, elle se trouve dans l'équation $x^2 - 2x = (x-3)^2$ qui implique $x^2 - 2x \geq 0$.

ii) Dans l'équation $\sqrt{(x-1)(x-4)} = \sqrt{(x-3)(x-5)}$, on écrit

$$(E_1) \Longleftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x-4) = (x-3)(x-5) \\ (x-1)(x-4) \geq 0 \\ (x-3)(x-5) \geq 0 \end{cases}$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x-4) = (x-3)(x-5) \\ (x-1)(x-4) \geq 0 \end{cases}$$

et la dernière condition, de fait équivalente à $x \in D_1$, introduit D sans le dire clairement.

En conclusion, il semble préférable d'introduire D systématiquement : cela aide les élèves à clarifier le sens de l'équation.
De plus, on pourra ainsi mettre en évidence que les raisons qui permettent d'écarter les fausses solutions peuvent être liées à D ou non.

Ajoutons que, dans une méthode par équivalence, de par son extrême concision, certaines conditions à écrire pour avoir un "système" équivalent à l'équation initiale peuvent être difficiles à comprendre et plus encore à déterminer pour les élèves qui risquent d'en oublier et de donner des solutions fausses.

Exemple :

$$\sqrt{x^2 - 2x} = x - 3 \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x = (x-3)^2 \\ \qquad x - 3 \geq 0 \end{cases}$$

Cette équivalence n'est sans doute pas évidente pour beaucoup d'élèves (ni d'ailleurs la référence à D).
En contrepartie, la compréhension de cette équivalence a un effet formateur certain. Il peut donc être utile de signaler ce type de rédaction.

4. Quelques suggestions

Dans la solution par "implication/vérification", les élèves oublient souvent la partie vérification. La raison peut être liée à la formulation de la proposition : "si x est solution, alors $x = 9/4$", qui est démontrée dans la partie "implication".
Pour les élèves, écrire "si x est solution" signifie que x est effectivement solution et la deuxième partie de la démonstration, consistant à vérifier que la valeur $9/4$ (trouvée dans la première partie) est solution, n'a pas lieu d'être.

Pour combattre cet effet néfaste du langage, nous proposons deux "améliorations" de la rédaction :

– Remplacer "si x est solution" par "supposons que x soit une solution" : on voit mieux qu'il s'agit d'une supposition/hypothèse, et que, dans la première partie, on étudie les conséquences de cette hypothèse. Notons que "soit x une solution" semble plus néfaste que "si x est une solution" car la première formulation renforce l'idée que x est effectivement solution.
– Il semble utile d'introduire l'ensemble S des solutions :
  - dans la méthode par "implication/vérification", l'introduction de S permet d'insister sur la nécessité de la partie "vérification" : la première partie montre que $S \subset \{9/4\}$ et la seconde partie consiste à étudier l'autre inclusion qui, ici, s'avère fausse ;
  - dans la méthode par équivalence, S sert uniquement à mieux visualiser le résultat.
– L'emploi du nom "implication/vérification" pour la méthode permettrait peut-être d'insister sur la nécessité de la partie vérification.

5. Un peu de logique

La rédaction du type "implication/vérification" contient une difficulté de nature logique. En fait, la première partie démontre une propriété du type :

$$\forall x \ (A(x) \Rightarrow B(x)) \qquad \big[\text{ici, } \forall x \in \mathbb{R}\big(x \text{ solution de } (E) \Rightarrow x = 9/4\big)\big]$$

dont on sait qu'elle est vraie lorsque A et B sont toutes les deux vraies mais aussi lorsque A est fausse. Dans la pratique, pour rédiger la démonstration d'une telle proposition, on écrit :

supposons que A soit vraie

puis on démontre que B est vraie. Mais on n'envisage jamais (ou presque) le cas où A est fausse. Or, pour l'équation (E) : $\sqrt{x^2 - 2x} = x - 3$, nous sommes justement dans le cas où A est fausse car il n'y a en réalité aucun x vérifiant (E) donc la proposition

$$\forall x \in \mathbb{R} \left(\sqrt{x^2 - 2x} = x - 3 \Rightarrow x = 9/4\right)$$

est vraie. On rencontre rarement cette situation dans le langage courant. Cela explique peut-être la difficulté pour les élèves à admettre la nécessité de vérifier que 9/4 est effectivement solution.

6. Conclusion

Les rédactions des solutions par les membres du groupe se sont avérées très différentes, mais on peut les classer en deux grands types (cf 2.) :

– rédaction par implication suivie d'une vérification,
– rédaction par équivalences successives.

Cela donne des solutions plus ou moins longues, mais aussi plus ou moins accessibles aux étudiants.

Notre analyse a permis de faire ressortir quelques points qu'ils nous semblent importants de respecter :

- La recherche préalable du domaine de définition (même si cette étape n'est pas toujours nécessaire)
- Pour toute transformation de l'équation, il convient de dire clairement si l'on utilise une implication ou une équivalence (la suite de la démonstration dépend de ce choix).
- Manipuler les équivalences avec précaution (en particulier il faut s'assurer qu'il s'agit bien d'une équivalence).
- Ecrire l'ensemble des solutions nous paraît clarifier le résultat, en particulier lorsque l'on résout l'équation par implication, où l'on obtient d'abord seulement une inclusion.

- Eviter les termes manquant de précision dans les énoncés et les solutions. Ainsi, dans ce test, l'utilisation lors du passage au carré de l'expression “on obtient”, qui correspond à une implication peut apparaître pour beaucoup d'étudiants comme une équivalence.

Annexe V

Rédactions par des enseignants

Enseignant 1
Ma résolution de l'équation (E) : $\sqrt{x^2 - 2x} = x - 3$.

(E) existe si et seulement si $x^2 - 2x \geq 0$
si et seulement si $x \leq 0$ ou $x \geq 2$

$D_E =]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$

Comme pour tout $x \in D_E$, $\sqrt{x^2 - 2x} \geq 0$, nous allons étudier deux cas

<u>1er cas</u> : $x - 3 < 0$, c'est-à-dire $x < 3$,
l'équation n'a pas de solution

<u>2ème cas</u> : $x - 3 \geq 0$, c'est-à-dire $x \geq 3$

sur $D_E, (E)$ équivaut à
$$\begin{aligned} x^2 - 2x &= x^2 - 6x + 9 \\ 4x &= 9 \\ x &= \tfrac{9}{4} \end{aligned}$$

Comme $\dfrac{9}{4} < 3$, (E) n'a pas de solution

Finalement : $S_E = \emptyset$

Enseignant 2
Exercice Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{x^2 - 2x} = x - 3$.

a) Version donnée aux étudiants :

Soit x une solution de cette équation s'il y en a, alors $\sqrt{x^2 - 2x} = x - 3$ donc, en mettant au carré, $x^2 - 2x = (x - 3)^2$, i.e. $4x = 9$. On en déduit que, si x est solution de l'équation, alors $x = 9/4$.
Réciproquement, soit $x = 9/4$, alors $\sqrt{x^2 - 2x} = 3/4$ et $x - 3 = -3/4$. $x = 9/4$ n'est donc pas solution de l'équation et celle-ci n'a pas de solution.

b) Version personnelle :

$$\sqrt{x^2 - 2x} = x - 3 \iff \begin{cases} x^2 - 2x = (x-3)^2 \\ x - 3 \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4x = 9 \\ x \geq 3 \end{cases}$$

Comme $9/4$ n'est pas supérieur ou égal à 3, on en déduit que cette équation n'a pas de solution réelle.

Enseignant 3

$(E) \qquad \sqrt{x^2-2x} = x-3.$

Si deux nombres réels sont égaux, alors ils ont le même carré

donc si $\sqrt{x^2-2x}= x-3$

alors $x^2-2x=x^2-6x+9$

$4x= 9$

$x= \frac{9}{4}$

Si l'équation a une solution, alors cette solution est $9/4$. Cette valeur convient-elle ?

Pour $x = 9/4$, $x-3 = \dfrac{9}{4} - 3 = -\dfrac{3}{4}$ donc $x-3 < 0$.

Or $\sqrt{x^2-2x}$ est un nombre positif, il ne peut pas être égal à $-\dfrac{3}{4}$..

La valeur trouvée ($x = \dfrac{9}{4}$) ne convient pas et l'équation (E) n'a pas de solution.

Enseignant 4

$(E) \qquad \sqrt{x^2-2x} = x-3. \qquad\qquad D =]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$

a) **Implication :**

Si x est solution de (E), alors $\begin{cases} x \in D \\ \text{et } x^2-2x = (x-3)^2 \end{cases}$

alors $\begin{cases} x \in D \\ \text{et } x = \dfrac{9}{4} \end{cases}$

alors $x = \dfrac{9}{4}$

Si $x = \dfrac{9}{4}$ alors $\sqrt{x^2-2x} = \dfrac{3}{4}$ et $x-3 = -\dfrac{3}{4}$

alors x n'est pas solution de (E).

b) **Equivalence :**

x est solution de $(E) \Longleftrightarrow \begin{cases} x \in D \\ x-3 \geq 0 \\ x^2-2x = (x-3)^2 \end{cases}$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} x \in [3, +\infty[\\ x = \dfrac{9}{4} \end{cases}$

$\dfrac{9}{4} \notin [3, +\infty[$ donc (E) n'a pas de solution.

Enseignant 5

$\sqrt{x^2-2x} = x-3$

- Ensemble de définition : $x^2-2x \geq 0$

  $D_f =]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$
- Pour $x \in D_f$, on a

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2-2x} = x-3 &\iff x^2-2x = (x-3)^2 \text{ et } x-3 \geq 0 \\
&\iff x^2-2x = x^2-6x+9 \text{ et } x \geq 3 \\
&\iff 4x = 9 \text{ et } x \geq 3 \\
&\iff x = \frac{9}{4} \text{ et } x \geq 3 \\
&\quad \mathscr{S} = \emptyset
\end{aligned}$$

Enseignant 6

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\sqrt{x^2-2x} = x-3$ (1)

ou Déterminer les solutions réelles de : $\sqrt{x^2-2x} = x-3$

a) 1ère méthode par CN

i) $\sqrt{x^2-2x} = x-3 \Longrightarrow x^2-2x = (x-3)^2 = x^2-6x+9$
$\Longrightarrow 4x = 9 \Longrightarrow x = 9/4$
Ceci montre que la seule solution possible de (1) est 9/4.

ii) 9/4 est-il solution ?
Si $x = 9/4$, on a $x-3 = 9/4-3 = -3/4 < 0$
alors que $\sqrt{x^2-2x} \geq 0$ (en fait pour $x = 9/4$, $\sqrt{x^2-2x} = 3/4$)
Donc l'égalité (1) ne peut être vérifiée.

Conclusion : (1) n'a pas de solution réelle.

b) 2ème méthode/rédaction par l'absurde

Supposons qu'il existe une solution a. En procédant comme dans (i) ci-dessus, on montre que $a = \frac{9}{4}$.

Mais alors $\sqrt{a^2-2a} = a-3 = \frac{9}{4} - 3 = -\frac{3}{4} < 0$.

Contradiction car une racine carrée est positive ou nulle.

Donc il n'y a pas de solution.

Enseignant 7

Exercice : résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation : $\sqrt{x^2 - 2x} = x - 3$.

a) 1ère solution

Supposons que $x \in \mathbb{R}$ soit une solution de l'équation $\sqrt{x^2 - 2x} = x - 3$, c'est-à-dire, que l'on suppose, entre autre, que pour cette valeur de x cette équation est bien définie.
En élevant au carré les deux membres de l'équation, on en déduit

$$x^2 - 2x = x^2 - 6x + 9$$

c'est-à-dire $x = \frac{9}{4}\cdot$ L'ensemble S des solutions de l'équation est donc contenu dans $\{\frac{9}{4}\}$, ou encore, la seule solution possible de l'équation s'il y en a une, est $x = \frac{9}{4}\cdot$

Mais est-ce bien une solution ? L'inclusion dans l'autre sens $\{\frac{9}{4}\} \subset S$ est-elle vérifiée ? Pour le savoir, il suffit de remplacer x par $\frac{9}{4}$ dans l'équation.

Remarquons tout d'abord que $x - 3 = \frac{9}{4} - 3 = -\frac{3}{4} < 0$. Or une racine carrée est, par définition, positive. Donc, sans finir notre calcul, on voit que $\frac{9}{4}$ ne peut être solution de l'équation.

Cette équation n'a donc aucune solution.

b) 2ème solution (*qui ne me plait pas du tout !*)

Résolvons cette équation en procédant par équivalence.
Commençons par préciser son ensemble de définition. La fonction racine carrée a un sens pour $(x^2 - 2x) \geq 0$, c'est-à-dire sur $]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$.
Sur cet ensemble, en considérant le carré des deux membres de l'équation, on trouve que l'équation équivaut à $x^2 - 2x = x^2 - 6x + 9$ et $x - 3 \geq 0$, car, par définition, une racine carrée est toujours positive ou nulle.

Or l'unique solution de cette dernière équation est $x = \frac{9}{4}\cdot$

L'équation initiale équivaut donc à $x = \frac{9}{4}$ et $x \geq 3$. Ce qui est impossible.
Il n'y a donc aucune solution.

Remarque : l'étude de l'ensemble de définition n'est pas obligatoire non plus, par équivalence. On peut considérer un x de l'ensemble de définition abstrait et constater que l'équation n'a aucune solution sur cet ensemble sans l'expliciter.
Mais comme au départ on ne sait pas qu'il n'y a pas de solution c'est un peu troublant.
On peut aussi remarquer que, si $x^2 - 2x = (x - 3)^2$, alors $x^2 - 2x$ est un carré et donc x est bien dans l'ensemble de définition de l'équation. Autrement dit l'équation : $\sqrt{x^2 - 2x} = x - 3$ est définie et admet x comme solution équivaut à $x^2 - 2x = x^2 - 6x + 9$ et $x - 3 \geq 0$.

Chapitre 5

A propos de quantificateurs

Le but de la fiche “Tous pour un ou un pour tous ?” en annexe VI à la fin du chapitre est de faire comprendre le changement de signification d’une proposition lorsque l’on change l’ordre des quantificateurs en partant de l’exemple de la différence entre une clef et un passe-partout. Les exemples ont été choisis pour être accessibles au niveau lycée et pour évaluer les progrès des étudiants ayant quelques années de recul sur les notions de période et de majorant.

1. Les statistiques de la fiche à l’université

Le test “Tous pour un ou un pour tous ?” a été proposé à 70 étudiants de DEUG MIAS, MASS et ENSI 1ère année.

1.1. Une histoire de clefs

P_1) Quelle que soit la porte, il existe une clef qui l’ouvre.
P_2) Il existe une clef qui ouvre toutes les portes.
Question :
A quelle proposition correspond la clef appelée “passe-partout” ?

Il y a eu 87% de bonnes réponses.
Les erreurs ne semblent pas très significatives ; la plus fréquente a été de penser qu’un “passe” (associé par les étudiants à la proposition P_1) était différent d’un “passe-partout” (associé à P_2) : ceci sort sans doute du cadre de notre travail.

1.2. Une histoire d’entiers

P_3) Quel que soit l’entier naturel, il existe un entier qui soit son double.
P_4) Il existe un entier égal au double de tous les autres.
Question :
Ces propositions sont-elles vraies ou fausses ? Justifier votre réponse.

ANALYSE

Il y a eu 91% de bonnes réponses (VF).

Proposition P_3
Il y a eu 97% de bonnes réponses.
Parmi celles-ci, 28% donnent une justification correcte (du type : “si n est un entier, $2n$ est aussi un entier”).
Parmi les justifications fausses ou insatisfaisantes, citons :

– *P_3 est vraie car $2x$ existe, ou car $2x$ est défini*
– *P_3 est vraie car N est infini*

La première erreur ci-dessus est fréquente pour des problèmes d’existence : l’étudiant oublie de vérifier que toutes les propriétés attachées à l’“objet existant” sont vérifiées. Ici, l’étudiant dit que $2n$ existe, mais oublie de préciser que c’est un entier.

Proposition P_4
Il y a eu 93% de bonnes réponses.
Parmi ces bonnes réponses, on note trois types de justifications fausses (pour les deux dernières) ou presque satisfaisantes (pour la première) :

– P_4 *est fausse car* $4 = 2 \times 2$ *et pas* 2×1. (28%)
  Ils donnent un exemple particulier pour justifier que l'existence est fausse. Ils font sans doute un raisonnement par l'absurde : si cet entier existait, il serait le double de 2 donc 4, mais aussi celui de 1 donc 2.
– P_4 *est fausse car* $\mathbb{N}$ *est infini* (3%)
– P_4 *est fausse car les entiers n'ont pas de limite* (6%)

A noter qu'un étudiant pense que P_4 est fausse si le nombre d'entiers désignés par le groupe de mots "tous les autres" est fini et vraie sinon.

SYNTHÈSE

Ce test est bien réussi dans l'ensemble. Ceci s'explique sans doute par le fait que les étudiants sont à l'aise avec le contenu mathématique (double d'entiers).

1.3. Une histoire de majorants

P_5) Quel que soit le réel x, il existe un majorant de $f(x)$.
P_6) Il existe un réel qui majore tous les $f(x)$.
Question :
Ces propositions sont-elles vraies ou fausses ? Justifier votre réponse.

1er cas : $f(x) = x^2$

ANALYSE

64% de bonnes réponses (VF),
20% ont répondu FF,
6% FV
3% VV.

Proposition P_5

67% de bonnes réponses (V).
Les justifications correctes les plus fréquentes sont du genre :

– *en prenant* $M = x^2 + 1$
– *en prenant* M *plus grand que* $f(x)$

Les erreurs significatives ou remarquables sont :

– P_5 *est vraie car* $x \mapsto x^2$ *est (strictement) croissante.*
  Même en se restreignant à $\mathbb{R}^+$ où $x \mapsto x^2$ est effectivement croissante, on est loin d'une démonstration complète.
– P_5 *est vraie car* $f(x+1) > f(x)$ *ou car* $x^4 > x^2$ (8%).
  Ici, la justification est plus élaborée, mais, dans les deux cas, l'argument ne vaut que pour certaines valeurs de x.

Certains accumulent les justifications, semblant ne rien comprendre au sens de la phrase :

– P_5 *est fausse car* x^2 *est paire et bijective ou car* x^2 *tend vers l'infini.*

Proposition P_6

84% de bonnes réponses (F).
La justification correcte la plus fréquente (58% des bonnes réponses) est de dire que x^2 tend vers l'infini ou est non majorée.
Les erreurs significatives ou remarquables sont :

– P_6 *est fausse car* x^2 *est croissante* (11.6%)
– P_6 *est vraie en* $x = 0$ (1 étudiant)
– P_6 *est vraie car* 0 *majore tous les* $f(x)$ (1 étudiant) : confusion entre majorant et minorant
– P_6 est vraie car $+\infty > f(x)$

SYNTHÈSE

- On remarque une confusion entre "majore" et "minore".
- La notion d'infini pose problème ("car $+\infty > f(x)$"). Les étudiants n'ont pas compris que $+\infty$ n'est pas autorisé comme majorant, ce qui dénote des lacunes sur la notion de majorant mais aussi sur celle d'infini.
- La croissance est fréquemment invoquée dans les justifications (bien que $f(x) = x^2$ ne soit croissante que sur $\mathbb{R}^+$).

2ème cas : $f(x) = \sin x$

ANALYSE

73% de bonnes réponses (VV),
14% ont répondu FV,
3% FF,
6% VF.

Proposition P_5

79% de bonnes réponses (V).
La justification correcte la plus fréquente est de dire que sin est majorée.
Les erreurs significatives ou remarquables :

- P_5 *est vraie car* $\lim_{x\to+\infty} = 1$ (1 étudiant)
- P_5 *est fausse car pour* $\sin 1 = 1$, *il n'y a pas de majorant* (1 étudiant)
- P_5 *est fausse car* sin *est périodique* (1 étudiant)
- P_5 *est fausse car, pour* $x = \pi$, sin *n'est pas majoré* (1 étudiant)

Proposition P_6

87% de bonnes réponses (V).
La justification correcte la plus fréquente est de dire que sin est majorée (comme pour P_5).
Les erreurs significatives ou remarquables sont :

- P_6 *est vraie car* sin *est périodique.*
  Cet argument est insuffisant à lui seul (cas de la fonction tangente par exemple)
- P_6 *est fausse car il y a plusieurs* $\sin x$ *égaux à 1.*
  Ici, il y a probablement une mauvaise compréhension du "un" dans l'expression "il existe un réel" ; les étudiants attachent sans doute l'idée d'unicité à ce terme. La formulation "plusieurs $\sin x$" montre également une confusion entre image et antécédent.

SYNTHÈSE

Le nombre de réponses FV (14%) est important : pour ces étudiants, la notion de "majorant" correspond peut-être à P_6 et, pour eux, la proposition P_5 (qui contient le mot majorant) est fausse.

A quelle proposition correspond la définition de majorant ?

82% des étudiants donnent la bonne réponse, 14% donnent la mauvaise et 4% ne répondent pas.
On remarque qu'aucun des étudiants n'affirme que les deux propositions correspondent à la définition de majorant.

Synthèse globale d'une histoire de majorants

Beaucoup d'étudiants justifient que P_5 est vraie ou que P_6 est vraie par la périodicité de sin. Ces étudiants semblent penser que toute fonction périodique est majorée, sans doute parce que les fonctions périodiques qu'ils rencontrent le plus souvent sont sin et cos qui sont effectivement majorées. En fait, une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$ qui est périodique est aussi majorée. Citons cependant l'exemple de la fonction tangente qui est périodique et non majorée ; mais elle n'est pas définie sur $\mathbb{R}$ et sans doute est-elle moins utilisée au lycée que sin et cos.

L'énoncé P_5 est souvent jugé faux par les étudiants (25% pour la fonction carrée et 17% pour la fonction sin). La mauvaise compréhension de cette proposition s'explique peut-être en partie par la formulation des énoncés où l'emploi du mot "majorant" est peu judicieux. Il conviendrait sans doute de reformuler ces énoncés ainsi :
P_5) Quel que soit le réel x, il existe un réel supérieur à $f(x)$.
P_6) Il existe un réel supérieur à tous les $f(x)$.

D'autre part, dans la pratique, il serait bon d'utiliser pour P_5 une notation indiquant que le réel peut dépendre du choix de x, par exemple :

P'_5) Quel que soit le réel x, il existe un réel $M(x)$ supérieur à $f(x)$.
Cette notation fonctionnelle utilisée de manière systèmatique serait sans doute plus claire à comprendre.

1.4. Une histoire de période

P_7) Quel que soit le réel x, il existe un réel T non nul tel que $f(x+T) = f(x)$.
P_8) Il existe un réel T non nul tel que, pour tout réel x, $f(x+T) = f(x)$.
Question :
Ces propositions sont-elles vraies ou fausses ? Justifier votre réponse.

1er cas : $f(x) = \sin x$

ANALYSE

79% de bonnes réponses (VV),

Proposition P_7

84% donnent la bonne réponse (V). Les justifications correctes sont du type "car $\sin x$ est périodique". Les erreurs significatives ou remarquables sont de dire que "$x = \pi$, $T = \pi$".

Proposition P_8

83% donnent la bonne réponse (V). Les justifications correctes sont (comme pour P_7) du type "car $\sin x$ est périodique".

2ème cas : $f(x) = E(x)$

ANALYSE

26% de bonnes réponses (VF),
30% de réponses FF.

Proposition P_7

39% de bonnes réponses (V). Les justifications correctes consistent à donner un T explicite en fonction de x (37% parmi les bonnes réponses).
Les justifications incomplètes sont :

- *P_7 est vraie car E est constante sur $[n, n+1[$*
- *P_7 est vraie si $T < 1$ et que l'on reste dans la même partie entière* (1 étudiant)
- *P_7 est vraie si $T < 1$ (14% parmi les bonnes réponses).*
  Cependant l'expression "si $T < 1$" laisse croire que les étudiants n'ont pas vu que le T dépendait de x.

Notons que la preuve que P_7 est vraie pour la fonction partie entière requiert une démonstration assez délicate à rédiger.

Proposition P_8

58% de bonnes réponses (F). Les justifications correctes sont du genre :

- *P_8 est fausse car E est non périodique* (20%)
- *P_8 est fausse car, pour tout T non nul, il existe x tel que $E(T+x) \neq E(x)$* (1 étudiant)

Les erreurs significatives ou remarquables sont :

- *P_8 est fausse car, pour $T = 2$, $E(x+2) \neq E(x)$*

A quelle proposition correspond la définition de période ?

60% donnent P_8 comme définition de période, 14% répondent que c'est P_7 et les autres donnent P_7 **et** P_8 comme définition de période.
Pour ces derniers, l'erreur semble provenir du fait que, pour la fonction sin (qui est périodique), P_7 et P_8 sont toutes les deux vraies. Pour la fonction partie entière qui n'est pas périodique, P_7 est vraie et P_8 est fausse.

En comparant les taux de réussite pour la notion de majorant et celle de période, il apparaît que celle de majorant est mieux comprise.

2. Les statistiques de la fiche au lycée

Cette fiche a été aussi testée en lycée sans la partie "période" dans deux classes de Terminale S.

2.1. Une histoire d'entiers

P_3) Quel que soit l'entier naturel, il existe un entier qui soit son double.
P_4) Il existe un entier égal au double de tous les autres.
Question :
Ces propositions sont-elles vraies ou fausses ? Justifier votre réponse.

92% ont répondu VF dont 43% avec une justification correcte. Pour la deuxième proposition, les justifications données sont du type "le double de 2 est 4, celui de 3 est 6 ; or $6 \neq 4$". ce début de raisonnement par l'absurde nous a semblé suffisant comme justification au niveau terminale. Il traduisait une bonne compréhension de la proposition.

2.2. Une histoire de majorants

P_5) Quel que soit le réel x, il existe un majorant de $f(x)$.
P_6) Il existe un réel qui majore tous les $f(x)$.
Question :
Ces propositions sont-elles vraies ou fausses ? Justifier votre réponse.

1er cas : $f(x) = x^2$

51% ont répondu VF et 25% FF.

L'immense majorité des élèves ont donné une justification liée au choix de la fonction f. Peu donnent une justification correcte : "f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ d'où $f(x+1) > f(x)$". La plupart évoquent la limite de f en $+\infty$. Quelques-uns donnent comme justification le fait que f n'est pas bornée ou que f n'admet pas de maximum sur $\mathbb{R}$.

1er cas : $f(x) = \sin x$

58% ont répondu VV, 27% FV. La justification la plus fréquente est le fait que la fonction sinus soit bornée par 1 et -1.

3. Synthèse globale de la fiche

Ce test sur les quantificateurs a mis en évidence des lacunes concernant aussi d'autres notions telles que majorant, infini, fonctions ...

L'énoncé P_5 :

Quel que soit le réel x, il existe un majorant de $f(x)$

a été source de problèmes pour certains élèves car il s'agit du majorant d'un ensemble à un seul élément, ce dont ils n'ont pas l'habitude. Il serait sans doute préférable d'énoncer P_5 sur le modèle de P_6 en introduisant en plus une notation fonctionnelle :

Quel que soit le réel x, il existe un réel $M(x)$ qui majore $f(x)$.

Beaucoup d'élèves n'ont pas compris que $+\infty$ ne devait pas être considéré comme un majorant, ce qui pose le problème de la compréhension de la notion de majorant, mais aussi de la notion d'infini.
A propos de la fonction $f: x \mapsto x^2$, les affirmations suivantes (qui sont fréquentes)

$$f \text{ est croissante} ; f(x+1) > f(x) ; x^4 > x^2$$

montrent la fragilité des connaissances. Les élèves ont une vision très partielle de cette fonction et ne voient pas que ces propriétés ne sont pas vraies pour tout x réel.

Pour les quantificateurs eux-mêmes, en cas de réponse juste, les justifications étaient plus ou moins satisfaisantes. Ainsi, pour P_4, on trouve :
- en DEUG : P_4 est fausse car $4 = 2 \times 2$ et pas 2×1
- en Terminale S : P_4 est fausse car le double de 2 est 4, celui de 3 est 6 et $6 \neq 4$.

Paradoxalement, la justification de Terminale S est mieux formulée (plus proche du raisonnement par l'absurde) et nous l'avons considérée comme bonne, alors que nous avons jugé insatisfaisante celle de DEUG vu le niveau d'étude.
Dans les deux cas, la faiblesse de l'argumentation tient au fait que l'unicité du double d'un entier n'est pas clairement énoncée, ni utilisée. Ceci tient sans doute au fait que cette propriété est "évidente" et en définitive la conclusion à tirer est que notre énoncé n'était pas adapté au test.
Quoiqu'il en soit, ce test aura mis en évidence les difficultés des élèves et des étudiants à formuler clairement et rigoureusement leur argumentation même lorsqu'ils semblent avoir compris le problème.
Les causes en sont sans doute d'une part une diminution de l'exigence de rigueur dans les démonstrations autant en première année d'université qu'au lycée, d'autre part un travail peu fréquent sur la signification des expressions "pour tout", "quel que soit" et "il existe".
Il serait souhaitable de réfléchir à l'utilisation occasionnel du langage formalisé dès le lycée pour faciliter la compréhension progressive de ces expressions.

Annexe VI

Tous pour un ou un pour tous...

I - Une histoire de clefs

1) Quelle que soit la porte, il existe une clef qui l'ouvre.

2) Il existe une clef qui ouvre toutes les portes.

A quelle proposition correspond la clef appelée “passe-partout” ?

II - Une histoire d'entiers

1) Quel que soit l'entier naturel, il existe un entier qui soit son double.

2) Il existe un entier égal au double de tous les autres.

Ces propositions sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez votre réponse.

III - Une histoire de majorant

1) Quel que soit le réel x, il existe un majorant de $f(x)$.

2) Il existe un réel qui majore tous les $f(x)$.

a) La fonction f est la fonction $x \mapsto x^2$.
Ces propositions sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez votre réponse.
b) Même question avec $f(x) = \sin x$.
c) A quelle proposition correspond la définition de majorant ?

IV - Une histoire de période

1) Quel que soit le réel x, il existe un réel T non nul tel que $f(x+T) = f(x)$.

2) Il existe un réel T non nul tel que, pour tout réel x, $f(x+T) = f(x)$.

a) La fonction f est la fonction $x \mapsto \sin x$.
Ces propositions sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez votre réponse.
b) Même question avec la fonction partie entière
c) A quelle proposition correspond la définition de fonction périodique ?

Chapitre 6

Manipulation des inégalités

Ayant constaté que la manipulation des inégalités restait une difficulté pour les lycéens, mais aussi les étudiants, nous avons voulu également les faire travailler sur ce sujet.

Dans un premier temps, nous avons cherché les points des programmes qui concernaient les inégalités et comment les ouvrages les traitaient. L'étude de l'inégalité démarrant en 4ème, nous sommes partis de cette classe et avons suivi le programme jusqu'en terminale S.

A partir de cette étude, nous avons préparé deux feuilles de test, l'une pour des élèves de 2nde (qui est l'année où l'on manipule beaucoup les inégalités), l'autre pour des étudiants de Deug 1ère année.

Les problèmes rencontrés par les étudiants pour répondre correctement aux exercices proposés nous ont amené à préparer une fiche récapitulative des principales propriétés des inégalités, ainsi qu'un exemple de cours sur le sujet. A noter qu'à la rentrée 2004, l'UFR de Mathématiques de l'université de Rennes I proposera un module de méthodologie contenant un cours d'aide à la manipulation des inégalités ; cette partie n'existait pas aussi explicitement auparavant et répond bien à un manque chez les étudiants.

Commençons donc par une étude des programmes et de l'utilisation qu'en font les manuels.

1. Les inégalités : de la 4ème à la terminale S

Pour chaque année scolaire, le programme est cité in extenso et le cours est celui du livre cité en référence.

1.1. Classe de 4ème

Programme de 1997

Effet de l'addition et de la multiplication sur l'ordre.

- Comparer deux nombres relatifs simples en écriture décimale ou fractionnaire ;
- Utiliser le fait que des nombres relatifs de la forme $a + b$ et $a + c$ sont rangés dans le même ordre que b et c ;
- Utiliser le fait que des nombres relatifs de la forme ab et ac sont rangés dans le même ordre que b et c si a est strictement positif. *Aucune connaissance n'est exigible lorsque a est négatif, mais ce cas sera évoqué pour montrer la nécessité de la condition $a > 0$ dans l'énoncé de la propriété envisagée.*

Livre

Référence : Maths 4e, Collection cinq sur cinq, Editeur Hachette Education

Le cours :

Propriété : Dire que $a - b < 0$ revient à dire que $a < b$.
Règle 1 : a, b et c désignent des nombres relatifs (soit positifs, soit négatifs).
Si $a < b$, alors $a + c < b + c$.
On dit aussi : "Les nombres $a + c$ et $b + c$ sont rangés dans le même ordre que les nombres a et b."
Règle 2 : a, b, c et k désignent des nombres relatifs.

- Si $a < b$ et $\boxed{k > 0}$, alors $ka < kb$.
- Si $a < b$ et $\boxed{k > 0}$, alors $\frac{a}{k} < \frac{b}{k}$.

On dit aussi : “Lorsque k est strictement positif, les nombres ka et kb sont rangés dans le même ordre que les nombres a et b.”

⚠ La condition $k > 0$ est indispensable. En effet ; si $3 < 4$, alors $(-2) \times 3 > (-2) \times 4$, donc $-6 > -8$. Lorsque $k < 0$, ka et kb sont rangés dans l'ordre inverse de a et b.

Les exercices :

Ils comparent des entiers naturels ou relatifs. Le livre propose des exercices sur le lien entre le signe de la différence de deux nombres et leurs positions respectives (“on sait que $a-b < -2$, comparer les deux nombres a et b”).
Il propose des exercices d'application immédiate des règles : “sachant que $a < 12$, que peut-on en déduire pour $a + 5$, $a - 20$, $4a$, $a/3$?”

Commentaire :

Seule l'inégalité stricte est étudiée, on ne parle pas d'inégalité large. Des exemples des règles 1 et 2 sont donnés avec des décimaux, bien que le cours ne porte que sur les relatifs. Ce chapitre est un chapitre important du cours de quatrième et les élèves sont supposés faire un grand nombre d'exercices sur ce sujet.

1.2. Classe de 3ème

Programme de 1998

Equations et inéquations du premier degré

- Utiliser le fait que des nombres relatifs de la forme ab et ac sont rangés dans le même ordre que b et c si a est strictement positif, dans l'ordre inverse si a est strictement négatif. *On pourra s'appuyer dans toute cette partie sur des activités déjà pratiquées dans les classes antérieures, notamment celles de tests par substitution de valeurs numériques à des lettres.*
- Résoudre une inéquation du premier degré à une inconnue à coefficients numériques. Représenter ses solutions sur une droite graduée.

Livre

Référence : Maths 3e, Collection cinq sur cinq, Editeur Hachette Education

Le cours :

Inéquations du premier degré à une inconnue :
Résoudre une inéquation du premier degré à une inconnue x, c'est trouver toutes les valeurs numériques que l'on peut donner à x pour que l'inégalité soit vraie. Ces valeurs sont les solutions de l'inéquation.
Méthode de résolution :
La méthode consiste à isoler x dans un membre à l'aide des trois règles suivantes :
Règle 3 : ordre et addition
L'ordre est conservé quand on ajoute (ou quand on retranche) un même nombre aux deux membres d'une inégalité.
Règle 4a : ordre et multiplication par un nombre positif
L'ordre est conservé quand on multiplie (ou quand on divise) par un même nombre positif non nul les deux membres d'une inégalité.
Règle 4b : ordre et multiplication par un nombre négatif
L'ordre est inversé quand on multiplie (ou quand on divise) par un même nombre négatif non nul les deux membres d'une inégalité.
Le cours est illustré par deux exemples, l'un avec une inégalité stricte, l'autre avec une inégalité large. Les solutions obtenues sont représentées sur une droite graduée.

Les exercices :

On retrouve les types d'exercices faits en quatrième, mais portant sur les décimaux :
- Ordre et opérations : Sachant que $x \geq -10$, que peut-on en déduire pour $x + 10$, $x - 4$, $0.1x$, $-4x$, $-x/2$?

- Encadrements : Un nombre x vérifie $2/3 < x < 3/4$. Trouver des encadrements pour les nombres $x - 1$, $3x$, $-4x$.
La résolution d'inéquations est une nouveauté par rapport à l'année précédente.

Commentaire :

C'est un approfondissement du programme de 4ème avec, en plus, la multiplication par un nombre négatif et l'utilisation plus systématique de nombres décimaux et rationnels. La résolution des inéquations est faite de manière formelle et avec de plus identification de l'ensemble des solutions sur une droite graduée.

1.3. Classe de 2nde

Programme de 2000

- Nature et écriture des nombres. Notations $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$: distinguer un nombre d'une de ses valeurs approchées. *On admettra que l'ensemble des réels est l'ensemble des abscisses des points d'une droite.*
- Ordre des nombres. Valeur absolue d'un nombre : choisir un critère adapté pour comparer des nombres. Comparer a, a^2 et a^3 lorsque a est positif. Caractériser les élèments d'un intervalle et le représenter. *La valeur absolue d'un nombre permet de parler facilement de la distance entre deux nombres.*
- Fonction croissante, fonction décroissante ; maximum, minimum d'une fonction sur un intervalle. *On soulignera le fait qu'une fonction croissante conserve l'ordre, tandis qu'une fonction décroissante inverse l'ordre ; une définition formelle est ici attendue.*
- Premières fonctions de référence. Etablir le sens de variation et représenter graphiquement les fonctions $x \mapsto x^2$, $x \mapsto 1/x$. Connaitre la représentation graphique de $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$. *D'autres fonctions telles que* $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto x^3$, $x \mapsto |\,x\,|$, *etc. pourront être découvertes à l'occasion de problèmes. Les résultats les concernant pourront être admis. Les positions relatives des différentes courbes ainsi découvertes seront observées et admises*
- Mise en équation ; résolution algébrique, résolution graphique d'équations et d'inéquations. Résoudre une équation ou une inéquation se ramenant au premier degré. Utiliser un tableau de signes pour résoudre une inéquation ou déterminer le signe d'une fonction. Résoudre graphiquement des équations ou inéquations du type $f(x) = k$, $f(x) < k$, $f(x) = g(x)$, $f(x) < g(x)$, etc.

Livre

Référence : 2de, Collection Transmath, Editeur Nathan

Le cours comprend un chapitre complet intitulé “Ordre et valeur absolue”, débutant par des rappels :

- Vocabulaire et notation
  Dire que x est un réel strictement positif signifie que x est supérieur à 0 et distinct de 0. On écrit alors $x > 0$ (ou $0 < x$), ce qui se lit “x est strictement positif”. L'écriture $x \geq 0$ signifie que x est un réel strictement positif ou bien égal à 0. On dit alors que “x est un réel positif”.
- Représentation sur une droite graduée.
- Troncature et arrondis

Le cours

1) Ordre et comparaison
   Comparer deux nombres a et b, c'est chercher à savoir quel est le plus grand (ou s'ils sont égaux). La propriété de base est celle-ci :
   Dire que $a < b$ équivaut à dire que $a - b < 0$.
   Ainsi, comparer a et b revient à chercher le signe de $a - b$. Dans la suite, on considère des inégalités strictes ($a < b$) mais tous les résultats restent valables avec des inégalités larges ($a \leq b$).

- Ordre et addition
  Théorème 1 : **Si** $a < b$, **alors** $a + c < b + c$ et $a - c < b - c$.
  Théorème 2 : **Si** $a < b$ et $c < d$, **alors** $a + c < b + d$
- Ordre et multiplication
  Théorème 3 : **Si** $a < b$ et $c > 0$, **alors** $ac < bc$ et $a/c < b/c$.
  Si $a < b$ et $c < 0$, **alors** $ac > bc$ et $a/c > b/c$.
  Théorème 4 :
  Si a, b, c et d sont des réels positifs tels que $a < b$ et $c < d$, **alors** $ac < bd$.
- Règle des signes

Le produit et le quotient de deux nombres de même signe est toujours positif.
Le produit et le quotient de deux nombres de signes contraires est toujours négatif.
La preuve des théorèmes 2 et 4 est proposée dans les exercices.
Il est souligné avec un exemple que l'on ne peut pas soustraire membre à membre des inégalités.
Preuve du théorème 2 : comparer $a + c$ et $b + c$, puis $b + c$ et $b + d$.
Preuve du théorème 4 : comparer ac et bc, puis bc et bd.

2) Passage au carré, à la racine carrée, à l'inverse
   - Passage au carré, à la racine carrée
     Théorème 5 :
     a et b étant **deux nombres positifs et distincts**, $a < b$ équivaut à $a^2 < b^2$.
     (La preuve est faite avec l'identité $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ et la règle des signes.)
     Il en résulte que : deux nombres positifs et leurs racines carrées sont rangées dans le même ordre.
   - Passage à l'inverse

   Théorème 6 :
   a et b étant **deux nombres strictement positifs**, $a < b$ équivaut à $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$.
   (La preuve est faite en simplifiant $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ et la règle des signes.)
3) Comparaison de a, a^2 et a^3 lorsque $a \geq 0$
   Théorème 7 : a est un réel strictement positif.
   - **Si** $a > 1$, **alors** $a^3 > a^2 > a$;
   - **Si** $0 < a < 1$, **alors** $a^3 < a^2 < a$.

   (La preuve est faite en utilisant le théorème 3.)
4) Valeur absolue
   - Distance entre deux réels
     Définition 1 : La distance entre deux réels x et y est la différence entre le plus grand et le plus petit. Cette distance est notée $|x - y|$ ou encore $|y - x|$. $|x - y|$ se lit valeur absolue de x moins y.
   - Valeur absolue d'un réel
     $|x|$ est la distance entre x et 0.

$$|x| = \begin{cases} x \text{ lorsque } x \geq 0 \\ -x \text{ lorsque } x \leq 0 \end{cases}$$

   - Quelques propriétés

   Dire que $|x| = 0$ équivaut à $x = 0$.
   $|-x| = |x|$
   Dire que $|x| = |y|$ équivaut à $x = y$ ou $x = -y$.

5) Intervalles et valeur absolue
   - Définition des différents types d'intervalles avec représentation graphique
   - Intervalles et valeur absolue

   a est un réel, r est un réel positif.

Dire que $|x-a| \leq r$ équivaut à dire que x appartient à l'intervalle $[a-r, a+r]$.
Commentaire : il n'est écrit nulle part que $|x| \leq r$ est équivalent à $-r \leq x \leq r$.

6) Inéquations. Signe de $ax+b$
   - Inéquations du premier degré : définitions
   - Signe de $ax+b$: deux tableaux sont donnés suivant le signe de a

Un chapitre intitulé : "Fonctions : variation"

1) Sens de variation d'une fonction
   On donne les définitions d'une fonction strictement croissante ou strictement décroissante sur un intervalle de son ensemble de définition avec des exemples graphiques, ainsi que les définitions de minimum et maximum.
2) Etude du sens de variation
   Etudier le sens de variation d'une fonction, c'est chercher les plus grands intervalles sur lesquels cette fonction est strictement croissante, strictement décroissante ou constante. On résume ces propriétés dans un tableau appelé tableau de variation.
   L'exemple des fonctions affines est entièrement étudié.

Un chapitre intitulé : "Fonctions usuelles"

1) Etude de la fonction $x \mapsto x^2$
   La fonction $f : x \mapsto x^2$, définie sur $\mathbb{R}$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$. Le tableau de variation et la courbe représentative sont donnés. Il est également montré comment retrouver sur la parabole $y = x^2$ le fait que, si a et b sont strictement positifs, alors $a < b$ équivaut à $a^2 < b^2$. En étudiant la position de la parabole par rapport à la droite $y = x$, on obtient que, si $0 < x < 1$, alors $x > x^2$. En traçant la droite $y = a$, $(a > 0)$, on voit comment retrouver les solutions de l'équation $x^2 = a$ et de l'inéquation $x^2 > a$. La monotonie est étudiée à partir de l'identité $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$.
2) Etude de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$
   La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est définie sur la réunion des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$. Cet ensemble est encore noté $\mathbb{R}^*$. Elle est strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. La preuve est faite en mettant au même dénominateur $\frac{1}{u} - \frac{1}{v}$.
3) Fonctions cosinus et sinus
   Le sens de variation est donné à partir de la lecture du cercle trigonométrique.

Les exercices :

Chapitre "Ordre et valeur absolue"
Enormément d'exercices de manipulation
Chapitre "Fonctions : variation"
Interprétation de graphes et de tableaux de variation. Etude de fonctions affines et de sommes de valeurs absolues de fonctions affines.
Chapitre "Fonctions usuelles"
En exercices, sont proposées les études des sens de variation de la fonction racine carrée, la fonction cube et de fonctions définies par intervalles.

Commentaire :

L'année de 2nde est celle où l'on doit avoir assimiler les manipulations liées aux inégalités en particulier dans le cadre de l'étude du sens de variation des fonctions. On utilise les inégalités pour prouver d'autres résultats (monotonie, signe d'une fonction).
Il n'y a pas d'inégalité triangulaire. Les inégalités strictes sont privilégiées.

1.4. Classe de 1ère S

Programme de 2001

Les inégalités ne sont plus au programme car supposées connues. Elles servent dans l'étude du signe de la dérivée d'une fonction, dans l'étude des suites monotones, pour le signe du trinôme.

Livre

Référence : 1^{re}S, Collection Transmath, Editeur Nathan

Le cours :

Fonctions de référence : $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto |x|$, fonctions sinus et cosinus.

Commentaire :

Tous les problèmes se ramènent à montrer qu'une quantité a un certain signe ; on ne majore plus des quantités par d'autres. Le sens de variation des fonctions est toujours étudié par le signe de la dérivée. Les manipulations faites en 2nde ne servent plus et l'élève oublie ce qu'il avait appris l'année précédente puisqu'il n'a plus assez à le mettre en pratique.

1.5. Classe de terminale S

Programme de 2002

Les inégalités ne sont plus au programme car supposées connues. Elles servent dans l'étude du signe de la dérivée d'une fonction, dans l'étude des suites monotones. Des nouvelles fonctions sont introduites, ainsi que leurs sens de variation : e^x, $\ln x$ et $\sqrt[n]{x}$. L'élève apprend à résoudre des inégalités utilisant des fonctions usuelles.
L'inégalité triangulaire est introduite dans le chapitre sur les complexes.

1.6. Commentaire

Les inégalités sont introduites progressivement de la quatrième à la 2nde ; un chapitre leur est entièrement consacré en 2nde. Cependant, les élèves ne les utilisent en 1ère et en terminale que lors de comparaison avec 0.
Les étudiants arrivant à l'université se voient demander d'obtenir des encadrements autres (étude de limite, de continuité, borne supérieure ou inférieure, etc.) et ceci lors de la définition de nouvelles notions. Ce sont parfois des majorations de terme $|x - y|$, manipulations qui ne sont pas actuellement rencontrées en lycée. Une difficulté technique s'ajoute alors à la compréhension de ces nouvelles notions.
On peut noter également que l'inégalité stricte est plus employée que l'inégalité large et qu'il n'y a pas vraiment d'exercices permettant de comprendre la différence.

2. Les test sur les inégalités

Nous avons alors préparé une fiche pour les élèves de 2nde (voir annexe VII en fin de chapitre) ; le but était de leur demander d'expliciter les règles sur les inégalités qu'ils utilisaient dans chacun de leurs calculs afin qu'ils en discernent bien les étapes. Nous avons également préparé une fiche pour les étudiants de Deug 1ère année (annexe VIII en fin de chapitre), toujours dans l'optique de les faire expliciter les différentes étapes d'une majoration. Pour ces deux fiches, nous avons conçu un rappel des règles minimales de manipulations d'inégalités. Nous avons choisi des exercices des différents chapitres utilisant les encadrements pour attirer leur attention sur l'intérêt d'une bonne manipulation des inégalités.

2.1. Test en 2nde

La fiche a été testée par deux classes de 2nde du lycée Bertrand d'Argentré en fin d'année. Les élèves se sont mis par groupes de 4. Ils n'ont pas pu finir la fiche en une heure.
Les élèves connaissent sans problème les 3 règles énoncées au début de la fiche mais, au cours de l'année, nous avions pu nous apercevoir qu'ils avaient beaucoup de difficultés à les manipuler et à les appliquer dans différents contextes (en particulier : sens de variation d'une fonction).
Nous nous sommes rendu compte dès le début de la séance qu'il fallait donner des explications supplémentaires et éventuellement faire quelques exemples avant de les laisser chercher. Les élèves connaissent les règles, mais ne les ont pas forcément bien comprises.

Exercice 1 :
Les élèves n'ont aucune difficulté quand il faut appliquer une seule règle. Les élèves dans ce cas repèrent exactement la règle à appliquer.
Quand il y a plusieurs règles à appliquer, la plupart de élèves donnent le résultat directement. L'enseignante est donc repassée dans chaque groupe pour expliquer la méthode et la rédaction qu'elle attendait, à savoir appliquer une règle à la fois en détaillant les étapes. Certains élèves sont peu convaincus de la nécessité de manipuler les inégalités en appliquant les règles l'une après l'autre.
Exemple : Si $x \leq -3$ alors $-2x + 4 \geq 10$ Règles 1 et 3 (règle 2 ?)
Pourtant, cette exigence permettrait à certains élèves d'éviter des erreurs : quelques-uns se sont trompés quand il y avait plus de deux règles à appliquer car ils “oubliaient” les règles de priorités sur les opérations.
Exemples d'erreur :

$$\text{Si } x \leq -3 \text{ alors } -2x + 4 \geq -2$$

$$\text{Ou encore } -2x + 4 \leq 10$$

Quand les élèves ont la règle n° 3 à appliquer pour un encadrement, certains ont des difficultés à réécrire l'encadrement avec le symbole $\leq$ au lieu de $\geq$.
Exemple : si $-1 \leq b \leq 2$ alors $1 \geq -b \geq -2$. Ils n'arrivent pas à écrire $-2 \leq -b \leq 1$.

Exercice 2 :
Pour cet exercice, les élèves n'ont pas donné les règles à appliquer pour aboutir au résultat. Celui-ci est donné directement. Pour eux, la réponse est évidente. Mais, **tous** se trompent pour l'encadrement de $x - y$: ils répondent $a - c \leq x - y \leq b - d$.
L'erreur qu'ils font est de n'appliquer que la règle n°1 : on ajoute $-y$ à chaque membre de l'encadrement et ils oublient qu'il faut déterminer un encadrement de $-y$.

Exercice 3 :
L'erreur dans l'exercice 2 a entraîné l'erreur pour l'encadrement de $\sqrt{2} - \sqrt{5}$. La notion d'amplitude d'un encadrement n'est pas connue.

Pas d'erreur dans l'exercice 4.

Exercice 5 :
Après avoir expliqué aux élèves leur erreur dans l'exercice 2, les élèves n'ont aucun problème pour l'exercice 5.

Exercice 6 :
Les élèves se rendent compte qu'ils ne peuvent pas appliquer la règle n°2 mais ils n'ont pas l'idée d'utiliser un encadrement de $-y$. Ils ont besoin de l'aide de l'enseignant pour trouver la solution.

Exercice 7 :
Les élèves ne se souviennent pas de la méthode de résolution des inéquations à l'aide des propriétés sur les inégalités. C'est pourtant cette méthode qu'ils ont utilisée en troisième. Ils résolvent donc mécaniquement les inéquations sans se rappeler quelles sont les propriétés sur les inégalités qu'ils appliquent en réalité.

Conclusion :

La séance a mis en évidence le manque d'entraînement à manipuler les inégalités au niveau de la 2nde, en particulier les encadrements. Il semble intéressant de travailler en module en début d'année sur ces propriétés et de les réinvestir dans les chapitres sur les fonctions (généralités et fonctions de référence). Ces difficultés rencontrées en 2nde, si elles ne sont pas résolues, se retrouvent en 1ère et en terminale pour l'étude de suites par exemple.

2.2. Test en DEUG 1ère année

La fiche (voir annexe VIII en fin de chapitre) est conçue sur un modèle analogue à celle de Seconde avec des exercices correspondant au niveau de Deug 1ère année. Elle a été testé dans un groupe de TD de Deug MIAS 1ère année.

Exercice 1
Dans le premier exercice, il est demandé aux étudiants de démontrer une inégalité simple. Celle-ci ne devait pas poser de problème à ce niveau d'études. 16% des étudiants se sont pourtant trompés : ils multiplient une inégalité par un terme dépendant de x sans se demander quel est son signe.

Plusieurs types de démonstrations étaient possibles :

1) manipulation d'inégalités en partant de "$x \geq 1$" et des règles données ;
2) remplacer l'inégalité $A \geq B$ par $A - B \geq 0$ et faire une étude de fonction pour en déterminer le signe ;
3) remplacer l'inégalité $A \geq B$ par $A - B \geq 0$, factoriser $A - B$ en mettant les deux termes au même dénominateur et étudier le signe de chacun des facteurs ;
4) supposer que $x \geq 1$ et partir de l'inégalité à démontrer en raisonnant par équivalence.

58.5% des étudiants ont préféré la première méthode, 33.5% la deuxième et 8% la troisième. Aucun n'a utilisé la dernière.
Dans cet exemple, les fonctions utilisées (polynôme de degré 1 et fonction racine carrée) ne nécessitaient pas l'usage d'une méthode d'étude de fonctions. La majorité des étudiants ont su le traiter par simple manipulation.

50% des étudiants ont bien répondu à l'énoncé en précisant à chaque fois la règle dont ils se servaient dans leurs calculs. Aucun des étudiants qui se sont trompés ne les a citées.
Demander une justification de chaque calcul aide donc les étudiants à mener leurs calculs à bien.

L'objectif des deux exercices suivants était de traiter deux thèmes (étude de fonctions et suites réelles) dans lesquels la bonne manipulation des inégalités est fondamentale pour pouvoir mener un raisonnement.

Exercice 2
Le but de l'exercice 2 est de donner un encadrement du point où une fonction réelle atteint son maximum, puis un encadrement de ce maximum. On commence par l'étude d'une fonction auxiliaire qui permet d'obtenir, par l'emploi d'une méthode de balayage sur une calculatrice, un encadrement d'un réel noté α dans le texte. 33% des étudiants n'ont pas répondu ou se sont trompés à cette question.
L'encadrement de $f(\alpha)$ qui utilisait l'encadrement de α obtenu dans les questions précédentes, mais qui avait la difficulté supplémentaire de devoir manipuler le réel e n'a été traité correctement que par 60% des étudiants ayant donné une réponse pour α. Généralement, cette partie est peu rédigée (peu précisent les règles utilisées) ; seul un résultat est écrit. Il est certes correct, mais le correcteur ne sait pas d'où il provient.
Parmi les erreurs rencontrées, citons les deux principales

- "d'après la question précédente, $a < \alpha < b$ donc $f(a) < f(\alpha) < f(b)$" (Rappelons que la fonction f admet un maximum en α) ;
- une réponse du genre "$a <$ (ou $\leq$)$f(\alpha) <$ (ou $\leq$) a" (Même valeur aux deux extrémités des inégalités).

Exercice 3
L'exercice 3 est un exercice classique d'étude de convergence d'une suite par une méthode de point fixe.
On rencontre, dans ce texte, des manipulations d'inégalités en deux endroits : pour montrer la croissance et la majoration de la suite et pour encadrer $\ell - u_n$. La première utilisation se fait au cours d'une récurrence, alors que la deuxième est l'application de la règle R_5 pour la fonction inverse. 67% ont su montrer la première partie et seulement 42% la deuxième partie qui paraissait pourtant plus simple.

Commentaires généraux
La manipulation d'inégalités "simples" ne semble pas acquise en fin de deug première année par un trop grand nombre d'étudiants ; or c'est un outil fondamental pour toute la partie analyse de l'enseignement mathématique universitaire. Les exercices proposés ici sont du programme de Terminale S et pourtant ils posent encore de nombreuses difficultés aux étudiants.
Les nouvelles notions introduites en première année d'université, particulièrement en analyse, demandent de savoir parfaitement manipuler des inégalités sur des termes contenant, en plus, des valeurs absolues (continuité, inégalité des accroissements finis, ...). La partie technique induite dans ces notions est trop souvent un blocage chez les étudiants pour la compréhension du cours.

Il serait bon de faire un rappel des règles portant sur les inégalités en début d'année de DEUG.

3. Une fiche récapitulative pour les étudiants

Pour tous les réels a, b, c et d

Règle 0 : $a \geq b$ est équivalent à $a - b \geq 0$

Règle 1 : Si $a \leq b$ et $c \leq d$, alors $a + c \leq b + d$.

Remarque 1 : Il n'y a aucune condition de signe nécessaire pour additionner des inégalités.
Remarque 2 : Si $c = d$, on obtient que $a + c \leq b + c$.

⚠ **On ne peut pas soustraire des inégalités.** Par exemple, $3 < 5$ et $2 < 6$, mais 1 n'est pas plus petit que -1. Si l'on veut majorer un terme de la forme $a - c$, on doit majorer a et minorer c. En effet, si $a \leq b$ et $c \geq d$, alors $-c \leq -d$ (voir la règle 2), d'où $a + (-c) \leq b + (-d)$, i.e. $a - c \leq b - d$.

Règle 2 : Si $0 \leq a$ et $c \leq d$, alors $ac \leq ad$.
Si $a \leq 0$ et $c \leq d$, alors $ac \geq ad$.

Cette règle dit également que, si $a = bc$, alors a et c sont de même signe si $b > 0$ et de signe contraire si $b < 0$.

⚠ **Si on multiplie une inégalité par un nombre positif, on ne change pas le sens de l'inégalité ; si on multiplie une inégalité par un nombre négatif, on change le sens de l'inégalité.**

Règle 3 : Si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$, alors $0 \leq ac \leq bd$

Preuve : D'après la règle 2, $0 \leq ac \leq ad$ car $a \geq 0$ et $ad \leq bd$ car $d \geq 0$. On en déduit que $0 \leq ac \leq bd$.

⚠ **On ne peut multiplier entre elles que des inégalités positives.** Si l'on a des inégalités qui ne vérifient pas cette condition, il peut être nécessaire d'utiliser des cas en séparant les inégalités en deux : la partie positive et la partie négative. En multipliant par -1 une inégalité entre nombres négatifs, on obtient une inégalité entre nombres positifs dont le sens a changé.

Au moyen de ces règles, on peut en déduire la monotonie de certaines fonctions.

Fonction carrée

$$\boxed{\text{Si } 0 \leq a \leq b \text{ alors } 0 \leq a^2 \leq b^2}$$

On a $b^2 - a^2 = (b-a)(b+a)$, or $b + a \geq 0$. On en déduit que $b - a$ et $b^2 - a^2$ ont le même signe d'après la règle 2.

⚠ On a $-2 \leq 1$, mais on n'a pas $(-2)^2 \leq 1^2$.

Fonction inverse

$$\boxed{\text{Si } 0 < a \leq b, \text{ alors } 0 < \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}}$$

On a $\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a-b}{ab}$, or $ab > 0$. On en déduit que $\frac{1}{b} - \frac{1}{a}$ et $b - a$ ont des signes contraires d'après la règle 2.

⚠ **Pour majorer un terme de la forme $\frac{a}{b}$ avec a et b strictement positifs, il faut majorer a et minorer b.** En effet, si $0 < a \leq c$ et $b \geq d > 0$, alors $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{d}$ et $0 < \frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ en utilisant la règle 3.

Pour tous les réels a, b, a_0 et pour tout $h \geq 0$,

Règle 4 :

$$\boxed{|a - a_0| \leq h \iff -h \leq a - a_0 \leq h \iff a_0 - h \leq a \leq a_0 + h \iff a \in [a_0 - h, a_0 + h]}$$

Règle 5 : $\boxed{|a + b| \leq |a| + |b|}$ (inégalité triangulaire)

Remarque : on a également $|a - b| = |a + (-b)| \leq |a| + |-b| = |a| + |b|$.

Règle 6 : conséquence de l'inégalité triangulaire $\boxed{\big|\,|a| - |b|\,\big| \leq |a - b|}$

Remarque : on a également $\big|\,|a| - |b|\,\big| \leq |a + b|$

4. Un exemple d'enseignement universitaire

Les inégalités ont été des outils de travail au lycée ; on ne leur a pas donné une existence propre. Un cours d'analyse de Deug se doit de définir l'inégalité large en tant que relation d'ordre, ce qui permettra de la distinguer de l'inégalité stricte. L'étudiant doit retrouver dans ce cours les formulations apprises au lycée ; il doit pouvoir consacrer un peu de temps aux inégalités contenant des valeurs absolues. Nous en donnons ici un plan détaillé possible.

4.1. Les règles de base des inégalités

4.1.1. Le relation d'ordre sur les réels

L'ensemble des réels est muni d'une relation notée $\leq$ qui vérifie les axiomes suivants :

i) pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad x \leq x$ (réflexivité) ;
ii) pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\quad (x \leq y \text{ et } y \leq x \Longrightarrow x = y)$ (antisymétrie) ;
iii) pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $\quad (x \leq y \text{ et } y \leq z \Longrightarrow x \leq z)$ (transitivité) ;
iv) pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\quad (x \leq y \text{ ou } y \leq x)$ (ordre total) ;
v) pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $\quad (x \leq y \Longrightarrow x + z \leq y + z)$ ($\leq$ est compatible avec l'addition) ;
vi) pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\quad (0 \leq x \text{ et } 0 \leq y \Longrightarrow 0 \leq xy)$ (Le produit de deux réels positifs ou nuls est positif ou nul).

A partir de la relation $\leq$, on définit la relation : $\geq$ par $x \geq y$ si et seulement si $y \leq x$.
La relation $x \leq y$ se lit "x est inférieur ou égal à y".
La relation $x \geq y$ se lit "x est supérieur ou égal à y".
Si $x \leq y$, on dit que x minore y ou que y majore x.
Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Dire que a est un majorant de E signifie que a majore tous les éléments de E. Par exemple, 2 est un majorant de $[-1, 1]$. 1 en est aussi un majorant. De même, dire que a est un minorant de E signifie qu'il minore tous les éléments de E. Dire que E est un ensemble borné signifie qu'il est majoré et minoré.

Exercice - Quels sont les axiomes utilisés dans le calcul suivant ?
Si $2x \leq 6$ et $0 \leq 3 - x$, alors $2x - 6 \leq 0$ et $0 \leq 3 - x$. D'où $2x - 6 \leq 3 - x$. On en déduit que $3x \leq 9$.

On définit la relation $<$ par

$$x < y \text{ si et seulement si } (x \leq y \text{ et } x \neq y)$$

et on lit que x est strictement inférieur à y. Cette relation ne vérifie pas l'axiome (i). Ce n'est pas une relation d'ordre. (Ellle ne vérifie pas (iv) également).

Exercice - 1°) Si $x < 2$, a-t-on $x \leq 2$?
2°) Montrer que $a \leq b$ si et seulement si $a - b \leq 0$.
Si $a \leq b$, alors $a + (-b) \leq b + (-b)$ d'après (v). Donc $a - b \leq 0$.
Si $a - b \leq 0$, alors $a - b + b \leq 0 + b$ d'après (v). Donc $a \leq b$.

Remarque - Le résultat "$a \leq b$ si et seulement si $a - b \leq 0$" est très utile : pour comparer deux nombres entre eux, il est souvent plus simple de comparer leur différence au réel 0.

4.1.2. Nombres réels positifs ou nuls, négatifs ou nuls

D'après (iv), pour tout couple $(0, a)$ de réels, on a $a \leq 0$ ou $0 \leq a$.
Si on a $a \leq 0$, on dit que a est négatif ou nul. On note $\mathbb{R}^-$ l'ensemble des réels négatifs ou nuls.
Si on a $0 \leq a$, on dit que a est positif ou nul. On note $\mathbb{R}^+$ l'ensemble des réels positifs ou nuls.
Si on a $a \leq 0$ et $0 \leq a$, alors $a = 0$ d'après l'axiome (iii).
Si $0 < a$, on dit que a est strictement positif. On note $\mathbb{R}^{*+}$ l'ensemble des réels strictement positifs.
Si $a < 0$, on dit que a est strictement négatif. On note $\mathbb{R}^{*-}$ l'ensemble des réels strictement négatifs.

Remarque - Par abus de langage, on dit souvent "positif" pour "positif ou nul".

Exercice - Montrer que, si $a \in \mathbb{R}^+$, alors $-a \in \mathbb{R}^-$.
On a $0 \leq a$, donc $0 + (-a) \leq a + (-a)$ d'après (v), i.e. $-a \leq 0$.

4.1.3. Règles des signes

Le produit de deux réels positifs est positifs. (C'est l'axiome (vi)).
Le produit d'un réel positif et d'un réel négatif est négatif. En effet, soit $a \leq 0$ et $0 \leq b$, alors $0 \leq -a$ et, d'après l'axiome (vi), on obtient $0 \leq -ab$. D'où $ab \leq 0$.
On montre de même que le produit de deux réels négatifs est positif.

Exercice - *Montrer que la fonction carrée est croissante sur* $\mathbb{R}^+$.

Soit $0 \leq a \leq b$. *On a* $b^2 - a^2 = (b-a)(b+a)$, *or* $0 \leq a+b$. *D'après les règles des signes* $b^2 - a^2$ *a le même signe que* $b-a$. *On en déduit que* $0 \leq b^2 - a^2$.

On montre de façon similaire que la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

4.1.4. Multiplication d'une inégalité par un réel

Soit $0 \leq a$ et $b \leq c$. Alors $ba \leq ca$.

En effet, d'après (v), $0 = b + (-b) \leq c + (-b)$ et, d'après (vi) $0 \leq a(c-b)$. On obtient le résultat en utilisant à nouveau (v).

Soit $a \leq 0$ et $b \leq c$. Alors $ca \leq ba$.

En effet, d'après (v), $0 = b + (-b) \leq c + (-b)$. Un exercice précédent a montré que $0 \leq -a$. D'où, d'après (vi) $0 \leq -a(c-b)$. On obtient le résultat en utilisant à nouveau (v) et le même exercice.

⚠ **Si on multiplie une inégalité par un nombre positif, on ne change pas le sens de l'inégalité ; si on multiplie une inégalité par un nombre négatif, on change le sens de l'inégalité.**

Exercice - *Montrer que, pour tous les réels* x, y, z *et* t *tels que* $x \leq y$ *et* $z \leq t$, *on a* $x + z \leq y + t$.

D'après (v), $x + z \leq y + z$. *Or, toujours d'après* (v), $y + z \leq y + t$. *En utilisant* (iii), *on obtient* $x + z \leq y + t$.

Il n'y a aucune condition de signe nécessaire pour additionner des inégalités.

⚠ **On ne peut pas soustraire des inégalités.** Si l'on veut majorer un terme de la forme $a - c$, on doit majorer a et minorer c. En effet, si $a \leq b$ et $c \geq d$, alors $-c \leq -d$ (multiplication par un réel négatif), d'où $a + (-c) \leq b + (-d)$, i.e. $a - c \leq b - d$.

4.1.5. Multiplication de deux inégalités positives

Si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$, alors $0 \leq ac \leq bd$

En effet $0 \leq ac \leq ad$ car $a \geq 0$ et $ad \leq bd$ car $d \geq 0$. On en déduit que $0 \leq ac \leq bd$ d'après (iii).

⚠ **On ne peut multiplier entre elles que des inégalités positives.** Si l'on a des inégalités qui ne vérifient pas cette condition, il peut être nécessaire d'utiliser des cas en séparant les inégalités en deux : la partie positive et la partie négative. En multipliant cette deuxième inégalité par -1, on obtient une inégalité positive.

⚠ Lorsque l'on manipule des lettres, il faut faire attention : elles peuvent désigner des quantités positives ou négatives.

⚠ **Pour majorer un terme de la forme $\frac{a}{b}$ avec a et b strictement positifs, il suffit de majorer a et de minorer b.** En effet, si $0 < a \leq c$ et $b \geq d > 0$, alors $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{d}$ par décroissance de la fonction inverse sur $]0, +\infty[$ et $0 < \frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ par produit de deux inégalités positives.

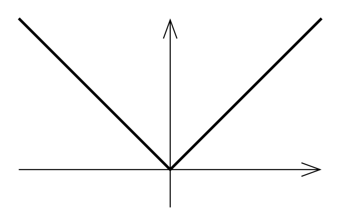
4.2. Valeur absolue

4.2.1. Définition

La valeur absolue d'un réel x, notée $|x|$ est définie par

$$|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$$

On en déduit que $|x|$ est toujours un réel positif, qui ne peut être nul que si $x = 0$.



Exercice - *Soit a et h deux réels avec $h \geq 0$. Montrer que $|a| \leq h$ si et seulement si $-h \leq a \leq h$.*

4.2.2. Première inégalité triangulaire

$$\boxed{\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad |a+b| \leq |a| + |b|.}$$

Comme $|a-b| = |a+(-b)|$, on a également $|a-b| \leq |a| + |-b| = |a| + |b|$.

On fait la preuve dans le cas $a \geq 0$ et $b \leq 0$.
On distingue deux cas :
1er cas : $a+b \geq 0$, alors $|a+b| = a+b$, or $a \geq 0$ et $b \leq 0$ donc $|a| + |b| = a-b$. Comme $b \leq 0$, on a $b \leq -b$ et on en déduit que $a+b \leq a-b$.
2ème cas : $a+b \leq 0$, alors $|a+b| = -a-y$, or $a \geq 0$ et $b \leq 0$ donc $|a|+|b| = a-b$. Comme $a \geq 0$, on a $-a \leq a$ et on en déduit que $-a-b \leq a-b$.
Les autres cas se traitent d'une façon similaire.

4.2.3. Deuxième inégalité triangulaire

$$\boxed{\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad \big| |a| - |b| \big| \leq |a-b|.}$$

On a également $\big| |a| - |b| \big| \leq |a+b|$.

$\big| |a| - |b| \big| \leq |a-b|$ est équivalent à $-|a-b| \leq |a| - |b| \leq |a-b|$.
On a donc à prouver les deux inégalités

$$\begin{cases} -|a-b| \leq |a| - |b| \\ |a| - |b| \leq |a-b| \end{cases} \iff \begin{cases} |b| \leq |a| + |a-b| \\ |a| \leq |a-b| + |b| \end{cases}$$

La première inégalité s'obtient en écrivant $|b| = |b-a+a|$ et en utilisant la première inégalité triangulaire. On fait de même pour la deuxième inégalité à prouver.

4.3. Intervalles

Définition - I est un intervalle de $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tout a et b dans I tel que $a < b$, si $a < x < b$, alors $x \in I$.

Soit $a < b$ deux réels, on appelle

- intervalle ouvert d'extrémités a et b l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ et on le note $]a,b[$.
- intervalle fermé d'extrémités a et b ou segment l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ et on le note $[a,b]$.
- intervalle semi-ouvert (ou semi-fermé) d'extrémités a et b les ensembles $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ noté $]a,b]$ et $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ noté $[a,b[$.

Ces ensembles sont bien des intervalles au sens de la définition précédente. Ils sont bornés (minorés par a et majorés par b).

On définit également des intervalles non bornés par :

- $[a,+\infty[=\{x\in\mathbb{R}\mid a\leq x\}$
- $]a,+\infty[=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x\}$
- $]-\infty,b]=\{x\in\mathbb{R}\mid x\leq b\}$
- $]-\infty,b[=\{x\in\mathbb{R}\mid x<b\}$

Remarque - Les symboles $+\infty$ (lire "plus l'infini") et $-\infty$ (lire "moins l'infini") ne désignent pas des réels, mais permettent l'extension de manière simple de la notion d'intervalles.

Lemme - Tout intervalle de $\mathbb{R}$ est de l'un des types suivants $\emptyset$, $[a,b]$, $[a,b[$, $]a,b]$, $]a,b[$, $[a,+\infty[$, $]a,+\infty[$, $]-\infty,b[$, $]-\infty,b]$, $]-\infty,+\infty[=\mathbb{R}$.

Exercice - Soit a et a_0 deux réels et h un réel strictement positif. Montrer que $|a-a_0|\leq h$ si et seulement si $a\in[a_0-h,a_0+h]$.

En effet, si $a-a_0\geq 0$, alors

$$|a-a_0|\leq h\iff 0\leq a-a_0\leq h\iff a_0\leq a\leq a_0+h.$$

De même, si $a-a_0\leq 0$, alors

$$|a-a_0|\leq h\iff 0\leq a_0-a\leq h\iff -h\leq a-a_0\leq 0\iff a_0-h\leq a\leq a_0.$$

En regroupant ces deux cas, on obtient le résultat.

4.4. Inéquations

Soit f et g définies sur un sous-ensemble E de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Résoudre l'inéquation $f(x)\leq g(x)$, c'est chercher l'ensemble des réels x de E qui vérifient l'inégalité $f(x)\leq g(x)$. Les réels obtenus sont appelés les solutions de l'inéquation.

Remarque - L'inéquation $f(x)\leq g(x)$ est équivalente (i.e. qu'elle a le même ensemble de solutions) à l'inéquation $f(x)-g(x)\leq 0$ ou encore à $0\leq g(x)-f(x)$.

Exercice - Résoudre l'inéquation $2x-7\leq x+4$.

4.5. Fonctions et inégalités

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Définitions :

- Dire que l'application f est croissante sur I signifie que
  $$\forall(x,x')\in I^2,\big(x<x'\Rightarrow f(x)\leq f(x')\big)$$
- Dire que l'application f est décroissante sur I signifie que
  $$\forall(x,x')\in I^2,\big(x<x'\Rightarrow f(x)\geq f(x')\big)$$
- Dire que l'application f est strictement croissante sur I signifie que
  $$\forall(x,x')\in I^2,\big(x<x'\Rightarrow f(x)<f(x')\big)$$
- Dire que l'application f est strictement décroissante sur I signifie que
  $$\forall(x,x')\in I^2,\big(x<x'\Rightarrow f(x)>f(x')\big)$$
- Dire que l'application f est monotone sur I signifie qu'elle est croissante sur I ou décroissante sur I.

La monotonie de certaines fonctions (comme $x\mapsto x^2$ ou $x\mapsto 1/x$) s'obtient en utilisant les règles de calculs rappelées au 1. Mais on peut également prouver la montonie d'une fonction en étudiant le signe de sa dérivée. On obtient alors des nouvelles propriétés : par exemple, la fonction logarithme est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ car sa dérivée est $x\mapsto 1/x$. On en déduit que, si $0<a<b$ alors $\ln a<\ln b$.

⚠ La fonction $x\mapsto 1/x$ est décroissante sur $]-\infty,0[$ et décroissante sur $]0,+\infty[$, mais elle n'est pas décroissante sur $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[=\mathbb{R}^*$. En effet, on a $-2<2$ et $-1/2<1/2$. Il y a en quelque sorte une "rupture dans la décroissance".

4.6. Valeurs approchées d'un réel

4.6.1. Encadrement et amplitude

Dire que les deux réels a et b encadrent le réel x, c'est avoir $a \leq x \leq b$ ou encore $x \in [a, b]$. La différence $b - a$ s'appelle l'amplitude de l'encadrement. Plus cette amplitude est réduite et plus l'encadrement est précis.

Remarque - En général, a et b sont des nombres décimaux, mais on peut aussi encadrer 1.5 par $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$. Par exemple, 1.41 et 1.42 encadrent $\sqrt{2}$ (en effet, $(1.41)^2 \leq 2 \leq (1.42)^2$) avec une amplitude de 0.01.

4.6.2. Approximation

Dire que le réel a est une approximation à α-près du réel x signifie que les nombres $a - \alpha$ et $a + \alpha$ encadrent le réel x, i.e. $a - \alpha \leq x \leq a + \alpha$.

4.6.3. Approximation par défaut

Dire que le réel a est une approximation par défaut à α-près du réel x signifie que les nombres a et $a + \alpha$ encadrent le réel x, i.e. $a \leq x \leq a + \alpha$.
La troncature qui consiste à ne garder que les premières décimales d'un nombre, est en fait une approximation par défaut.

4.6.4. Approximation par excès

Dire que le réel a est une approximation par excès à α-près du réel x signifie que les nombres $a - \alpha$ et a encadrent le réel x, i.e. $a - \alpha \leq x \leq a$.

4.6.5. Valeurs approchées

Soit x un réel dont on connaît un encadrement : $a \leq x \leq b$. Dans les calculs approchés, on remplace le nombre x par un nombre α de l'intervalle $[a, b]$; α est une valeur approchée de x. L'erreur commise est égale à $|x - \alpha|$, que l'on majore par la plus grande des deux valeurs $\alpha - a$ et $b - \alpha$. (Faire un dessin)

Exercice - Soit $3.14 \leq x \leq 3.95$ et $3.41 \leq y \leq 3.91$. Calculer un encadrement de $x + y$, le plus précis possible. Mêmes questions pour $x - y$, xy et x/y.

4.7. Limites et inégalités

Remarque - Cette partie ne peut se faire que si le cours sur les limites a été vu auparavant.

Une autre technique pour obtenir des inégalités est l'utilisation de limites connues.
Par exemple, supposons que l'on veuille minorer ou majorer une fonction f au voisinage de a et que l'on sache que $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in]a - \alpha, a + \alpha[$, $f(x) \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$. Il suffit alors de choisir ε judicieusement.
Les limites à l'infini et les limites infinies permettent également de déterminer des inégalités.

4.8. Feuille de TD possible en DEUG 1

Nous donnons ci-après une feuille d'exercices de travaux dirigés proposée aux étudiants en application du cours présenté dans la section 4. Elle commence par un rappel des règles minimales de manipulation des inégalités et reprend certains exercices que nous avons déjà cités, mais nous paraissant être une bonne application de l'utilisation des inégalités.

Rappels des règles concernant les inégalités

Pour tous les réels a, b, c et d,

R_1 : $a \leq b$ est équivalent à $b - a \geq 0$.
R_2 : si $a \leq b$ et $c \leq d$, alors $a + c \leq b + d$.
R_3 : si $c \geq 0$ et $a \leq b$, alors $ca \leq cb$.
R_4 : si $c \leq 0$ et $a \leq b$, alors $ca \geq cb$.
R_5 : si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$, alors $0 \leq ac \leq bd$.
R_6 : soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a < b$ deux éléments de I :
si f est croissante sur I, alors $f(a) \leq f(b)$.
si f est décroissante sur I, alors $f(a) \geq f(b)$.

RÈGLES DE BASE SUR LES INÉGALITÉS

Lors de chaque manipulation d'inégalités, on demande de préciser la règle utilisée.

Exercice n°1

Montrer que, pour tout $x \geq 1$, $\dfrac{1-x}{\sqrt{x}+1} \geq \dfrac{1-x}{2}$.

Exercice n°2

1) A quel intervalle appartient x^2 si $x \in]-5, 1[$?
2) Quel est l'ensemble des solutions réelles de l'inéquation $1/x < -2$?

Exercice n°3

Soient deux réels x et y tels que $-2 \leq x \leq 3$ et $-7 \leq y \leq -5$. Encadrer les quantités suivantes :

$$1)\ x^2 \qquad 2)\ \frac{x^2}{y^2 - x^2}$$

Exercice n°4

On considère le sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ défini par

$$A = \left\{ \frac{x-y}{x+y+3}\ ;\ x \in [-1,1], y \in [-1,1] \right\}.$$

Trouver un majorant et un minorant de A.

VALEUR ABSOLUE ET INÉGALITÉS

Exercice n°5

Montrer que, pour tous les réels x et y, on a $2|xy| \leq x^2 + y^2$.
Peut-on avoir égalité ?

Exercice n°6

On suppose que $|x - 1| \leq 2$ et que $-5 \leq y \leq -4$. Encadrer les quantités suivantes :

$$1)\ x + y \qquad 2)\ x - y \qquad 3)\ xy \qquad 4)\ \frac{x}{y} \qquad 5)\ |x| - |y|.$$

Exercice n°7

Soit x un réel tel que $|x| \leq 1$. Montrer que $\left| \dfrac{x + \sin x}{x^7 + x - 3} \right| \leq 2$.

Exercice n°8

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $N_1(x, y) = |x| + |y|$, $N_2(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $N_\infty(x, y) = \max(|x|, |y|)$ où le max de deux nombres représentent le plus grand de ces deux nombres.
Montrer que, pour tous les réels x et y , on a $N_\infty(x, y) \leq N_2(x, y) \leq N_1(x, y) \leq 2N_\infty(x, y)$.

Fonctions et inégalités

Exercice n°9

Démontrer les inégalités suivantes et donner une interprétation géométrique.

1) Pour tout réel x, $e^x \geq 1 + x$

2) Pour tout réel $x > 0$, $\ln x \leq x - 1$

3) Pour tout réel $x \in [0, \pi/2[$, $\sin x \leq x \leq \tan x$

Exercice n°10

Déterminer les domaines de définition des fonctions réelles suivantes :

1) $f(x) = \dfrac{2 - \sqrt{2 - 3x}}{\sqrt{3x + 5} - 3}$

2) $g(x) = \ln(x^2 - 4x + 3)\sqrt{4x - x^2}$

Résolution d'inéquations

Exercice n°11

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes

1) $|x - 3| + |x + 4| \leq 7$

2) $0 \leq \dfrac{x}{x^2 - 1} \leq 1$

3) $\dfrac{x^3 - 1}{x + 1} \leq x^2 - x - 1$

4) $\sqrt{x^2 - 4x + 4} \leq \left|\dfrac{3}{2}x - 1\right|$

5) $(4x^2 - 9)\ln(8 - x^2) \geq 0$

6) $\left|\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x - 1}\right| < \dfrac{1}{|x|} - \dfrac{1}{|x| - 1}$

7) $3|x - 2| - 2|x - 1| \geq |x - 4| - \dfrac{1}{4}(2x - 11)$

Approcher un nombre

Exercice n°12

Lequel des deux réels $\dfrac{10^{20}}{1 + 10^{20}}$ et $1 + 10^{-20}$ est le plus proche de 1 ?

Exercice n°13

1) Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = -2\ \ln x - x\, e + 1$. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ a une solution unique, α, sur l'intervalle $]0, +\infty[$. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-3}. (Utiliser une calculatrice)

2) Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln x + x\, e}{x^2}$.

- **a)** Etudier les variations de f.
- **b)** Démontrer que $f(\alpha) = \dfrac{1 + \alpha\, e}{2\alpha^2}$.
- **c)** Déduire, de l'encadrement de α, un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 10^{-1}.

Exercice n°14

Soit $\alpha \in]0, 1]$ et $I_\alpha =]-5 - \alpha, -5 + \alpha[$.

Déterminer α pour que, si $x \in I_\alpha$, alors $\left|\dfrac{x + 5}{x + 3}\right| < 10^{-2}$.

Exercice n°15

Déterminer une valeur approchée à 10^{-1} près de $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{8+x^3}$.

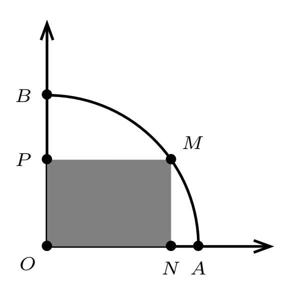
Exercice n°16

Donner un encadrement de $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{e^x}{x^2}\, dx$.

UN PEU DE MODÉLISATION

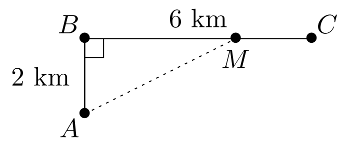
Exercice n°17

On considère un quart de cercle de centre O, de rayon 5 cm et d'extrémités A et B. Un point M est mobile sur cet arc. N et P sont les projetés orthogonaux respectifs du point M sur $[OA]$ et $[OB]$. Etudier les variations de l'aire du rectangle $ONMP$ suivant la position du point M, déterminer la position pour laquelle l'aire est maximale et calculer ce maximum.



Exercice n°18

L'occupant d'une barque se pose le problème suivant : "Je suis en mer (point A) à deux kilomètres en ligne droite de la plage (point B). Je désire atteindre le plus rapidement possible



ma maison (point C) qui se trouve sur la plage à 6 kilomètres du point B. En barque, j'avance à une vitesse de 3 km/h et à pied à une vitesse de 5 km/h. En quel point M du rivage dois-je accoster ?"

4.9. Autres exercices de niveau DEUG

• Inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\boxed{\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad 2|ab| \leq a^2 + b^2.}$$

Cette inégalité est équivalente à $-(a^2+b^2) \leq 2ab \leq a^2+b^2$. Comme $(a+b)^2 \geq 0$ et $(a-b)^2 \geq 0$, en effectuant, on obtient les deux inégalités recherchées : $a^2+b^2 \geq -2ab$ et $a^2+b^2 \geq 2ab$.

• Ensembles bornés

Soit $A = \left\{\dfrac{x-y}{x+y+3}\,;\,(x,y) \in [-1,1]\times[-1,1]\right\}$. Trouver un majorant et un minorant de A.

Comme $-1 \leq x \leq 1$ et $-1 \leq y \leq 1$, on a $-1 \leq -y \leq 1$. D'où $-2 \leq x-y \leq 2$ et $1 \leq x+y+3 \leq 5$ d'après la règle 1. En utilisant la décroissance de la fonction inverse sur $]0,+\infty[$, on en déduit que $1/5 \leq \frac{1}{x+y+3} \leq 1$. On va alors distinguer deux cas :

1er cas : $-2 \leq x-y \leq 0$. Alors $0 \leq y-x \leq 2$ et, d'après la règle 3, $0 \leq \frac{y-x}{x+y+3} \leq 2$. D'où $-2 \leq \frac{x-y}{x+y+3} \leq 0$;

2ème cas : $0 \leq x-y \leq 2$. Alors, d'après la règle 3, $0 \leq \frac{x-y}{x+y+3} \leq 2$.

On en déduit que $-2 \leq \frac{x-y}{x+y+2} \leq 2$.

• Fonctions continues

Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrons que la fonction valeur absolue est continue en a, i.e.

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ (|x-a| < \alpha \Longrightarrow \big| |x| - |a| \big| < \varepsilon).$$

Soit $\varepsilon > 0$. Choisissons $\alpha = \varepsilon$. Pour tout x réel, d'après la deuxième inégalité triangulaire, $\big| |x| - |a| \big| \leq |x-a|$. Si on prend x tel que $|x-a| < \alpha$, alors $\big| |x| - |a| \big| < \alpha = \varepsilon$ et on a prouvé la continuité de la fonction valeur absolue au point a.

• Suites et séries

Montrer que la série $\sum_{n=2}^{+\infty} u_n$ de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^2 \ln n}$ est convergente.

Remarquons que, pour tout n, $u_n \geq 0$. On a $\lim_{n \to +\infty} n^2 u_n = 0$. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $0 \leq n^2 u_n \leq 1$, i.e. $0 \leq u_n \leq 1/n^2$. Or la série de Riemann $\sum 1/n^2$ est convergente donc la série $\sum_{n=2}^{+\infty} u_n$ converge.

Annexe VII

INEGALITES Classe de 2nde

Règle n°1 : Le nombre c est un réel quelconque. Si $a \leq b$, alors $a + c \leq b + c$.

Règle n°2 : Le nombre c est un réel positif. Si $a \leq b$, alors $ac \leq bc$.

Règle n°3 : Si $a \leq b$, alors $-a \geq -b$.

Exercice 1

Complétez les phrases suivantes et indiquez dans chaque cas les règles utilisées.

Si $a \leq 4$, alors $a + 3 \ldots\ldots$

Si $a \geq 3$, alors $3a \ldots\ldots$

Si $y \leq 2$, alors $-2y \ldots\ldots$

Si $x \leq -3$, alors $-2x + 4 \ldots\ldots$

Si $4 \leq a \leq 5$, alors $\ldots\ldots \ - a \ldots\ldots$

Si $a \leq -1$, alors $a - 2 \ldots\ldots$

Si $x \geq -1$, alors $-x \ldots\ldots$

Si $a \geq 4$, alors $2a - 3 \ldots\ldots$

Si $1 \leq x \leq 3$, alors $\ldots\ldots 3x - 4 \ldots\ldots$

Si $-1 \leq b \leq 2$, alors $\ldots\ldots -b - 3 \ldots\ldots$

Exercice 2

Complétez la phrase suivante et indiquez les règles utilisées.
Si $a \leq x \leq b$ et $c \leq y \leq d$, alors $\ldots\ldots x + y \ldots\ldots$ et $\ldots\ldots x - y \ldots\ldots.$
On suppose maintenant que les réels a, b, c et d sont des réels positifs.
Compléter $\ldots\ldots xy \ldots\ldots.$

Exercice 3 :

Sachant que $1,41 \leq \sqrt{2} \leq 1,42$ et que $2,23 \leq \sqrt{5} \leq 2,24$, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-1} des nombres suivants : a) $\sqrt{2}-1$ b) $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ c) $\sqrt{2}-\sqrt{5}$

Exercice 4 :

Les dimensions L et l d'un champ rectangulaire sont données par les encadrements suivants (en mètres) :

$$53 \leq l \leq 54 \text{ et } 101 \leq L \leq 102.$$

Donner un encadrement de l'aire de ce champ rectangulaire.

Exercice 5 :

Soient deux réels a et b tels que : $-2 \leq a \leq 3$ et $-1 \leq b \leq 10$.
Trouver un encadrement de chacun des nombres suivants : $a+b$; $a-b$; $2a-5b$; $-3a+2b-4$.

Exercice 6 :

On sait que $1,56 \leq x \leq 1,57$ et que $-3 \leq y \leq -2,9$.
Donner un encadrement du produit xy.

Exercice 7 : Résolution d'inéquations

En indiquant pour chaque étape la règle utilisée, résoudre les inéquations suivantes :

$$\text{a) } -7(x+2) - \frac{3}{4} \geq 2(1-x) \qquad \text{b) } 4x - \frac{1}{3}(x+1) < 2.$$

Exercice 8 : Fonctions affines

1) Rappeler la propriété sur le sens de variation d'une fonction affine. La démontrer en indiquant pour chaque étape les règles utilisées.
2) En utilisant le sens de variation des fonctions affines, déterminer l'image des intervalles suivants par la fonction affine $f: \ x \mapsto f(x) = 3x - 2$.
   a) $I = [1; +\infty[$
   b) $I = [-3; 4]$

3) En utilisant le sens de variation des fonctions affines, déterminer l'image des intervalles suivants par la fonction affine $f: \ x \mapsto -2x + 1$.
   a) $I = [2; +\infty[$
   b) $I =]-\infty; 1[$
   c) $I = [-2; 3]$

Annexe VIII

INEGALITES DEUG 1ère année

RAPPELS DES RÈGLES CONCERNANT LES INÉGALITÉS

Pour tous les réels a, b, c et d,

R_1 : $a \leq b$ est équivalent à $b - a \geq 0$.
R_2 : si $a \leq b$ et $c \leq d$, alors $a + c \leq b + d$.
R_3 : si $c \geq 0$ et $a \leq b$, alors $ca \leq cb$.
R_4 : si $a \leq b$, alors $-a \geq -b$; donc, si de plus $c \leq 0$, alors $ca \geq cb$.
R_5 : soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a < b$ deux éléments de I :
si f est croissante sur I, alors $f(a) \leq f(b)$;
si f est décroissante sur I, alors $f(a) \geq f(b)$.

Lors de chaque manipulation d'inégalités, on demande de préciser la règle utilisée.

Exercice n°1

Montrer que, pour tout $x \geq 1$, $\dfrac{1-x}{\sqrt{x}+1} \geq \dfrac{1-x}{2}$.

Exercice n°2

1) Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = -2\ln x - x\,e + 1$.

a) Montrer que la fonction g est bijective de $]0, +\infty[$ sur $g(]0, +\infty[)$. Déterminer $g(]0, +\infty[)$.

b) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ a une solution unique, α, sur l'intervalle $]0, 1.5]$. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-3}.

2) Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln x + x\,e}{x^2}$.

a) Etudier les variations de f.

b) Démontrer que $f(\alpha) = \dfrac{1 + \alpha\,e}{2\alpha^2}$.

c) Déduire, de l'encadrement de α, un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 10^{-1}.

Exercice n°3

On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < u_n < u_{n+1} < 2$. En déduire que $(u_n)_n$ est convergente.

2-a) Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $2 - u_{n+1} = \dfrac{2 - u_n}{\sqrt{u_n + 2} + 2}$.

b) En déduire que $0 < 2 - u_{n+1} < \dfrac{1}{2}(2 - u_n)$, puis que $0 < 2 - u_{n+1} \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$. Quelle est la limite de $(u_n)_n$?

Chapitre 7

Une expérimentation : trouver les erreurs

Nous avons proposé à des élèves de terminale (2 classes) un énoncé accompagné de solutions contenant des fautes ou des manques de précision. Ces solutions, présentées comme des copies (copie 1 et copie 2) sont supposées avoir été écrites par des élèves. On leur demandait de corriger ces copies où les erreurs portent essentiellement sur les inégalités, la convergence des suites monotones et la récurrence. La suite choisie fait intervenir la racine carrée d'un nombre réel positif. Nous avons déjà vu dans la fiche résolution d'équations, que cette fonction pose problème. Nous allons rencontrer à nouveau ce problème, bien que nous n'avions pas l'intention a priori de l'étudier en proposant cette activité.

Voici l'énoncé du problème :

Problème- Considérons la suite (u_n) définie par u_0 dans l'intervalle $]0,2[$ et, pour tout entier naturel n, la relation de récurrence $u_{n+1} = \sqrt{2\,u_n}$.
La suite est-elle monotone ?
Est-elle convergente ? Si oui, déterminer sa limite.

Les deux copies figurent en annexe IX en fin de chapitre.
Présentons les différents points qui ont fait réagir les élèves en essayant d'analyser leurs réactions.

1. Bilan de l'expérimentation

1.1. La récurrence

Copie 1 : prouver (u_n) croissante

Une grande majorité des élèves affirme :
- *On ne peut pas généraliser, il faut une récurrence.*
ou bien
- *il faut calculer* $u_{n+1} - u_n$ (sans parler de récurrence)

Beaucoup précisent, par écrit ou oralement (pour cette copie ou pour la copie 2) qu'il y a trois étapes pour une récurrence. Certains précisent en particulier qu'il manque ici l'hérédité.

Copie 2 : prouver $u_n < 2$

La plupart des élèves voient que l'initialisation n'a pas été faite et que la conclusion est absente ou que l'hérédité est incomplète.

Signalons quelques hésitations pour les élèves sur ce qu'est l'hérédité :
- *Si c'est vrai pour tout n c'est vrai pour $n+1$. Ah non ! si c'est vrai pour un certain n c'est vrai pour $n+1$.*
On remarquera qu'ils sont souvent capables, en réfléchissant ou en discutant par groupe, de corriger par eux-mêmes certaines de leurs erreurs.

Une des élèves, un peu en difficulté, n'accepte pas le fait de "supposer". Elle ne semble pas avoir bien compris qu'écrire "Si ...", c'était faire une supposition. Mais elle est isolée dans son groupe, ses camarades cherchant à la convaincre que cette supposition est tout à fait légitime et que c'est la démarche habituelle dans la récurrence. Toutefois une autre élève commence à douter et remplace le "supposons" par "comme". Voici un extrait du dialogue entre 4 élèves A, B, C, D :

A - Elle fait une récurrence mais elle fait une supposition.
B - Moi je trouve que c'est bon : initialisation-hérédité-conclusion ; moi ça me va.
D - T'es pas obligé de faire en 3 étapes.
B - Moi ça ne me dérange pas ; on veut prouver $u_n < 2$ et on le suppose.
D - En même temps, c'est ça la récurrence.
A - (pas d'accord) Pour prouver, elle suppose $u_n < 2$.
C - Quand tu fais la récurrence, tu supposes $u_n < 2$ et tu démontres $u_{n+1} < 2$.
D - Je pense que c'est plutôt "comme $u_n < 2$" car (u_n) est définie dans $]0, 2[$ donc c'est forcément strictement plus petit que 2.

Dans un autre groupe :
- *On a le droit de supposer quelque chose, dans une récurrence ?*

1.2. Une suite, c'est quoi ?

En écoutant les élèves et en regardant bien ce qu'ils écrivent, on perçoit chez quelques élèves une difficulté a bien comprendre l'objet "suite".

1.2.1. Notion de suite

Les élèves ont souvent mal compris l'énoncé, l'interprétant sans doute comme ceci : (u_n) *est définie dans l'intervalle* $]0, 2[$ *par* u_0 *et la relation de récurrence. . .*
Cette inversion, assez fréquente, les menait à penser que "$u_n \in]0, 2[$" faisait partie des hypothèses comme le montrent les réactions suivantes :
- *C'est plutôt : comme $u_n < 2$, car (u_n) est définie dans l'intervalle $]0, 2[$.*
- *On sait que $u_n < 2$, c'est dit dans le texte que la suite est définie dans l'intervalle $]0, 2[$.*

1.2.2. Confusion entre fonction définie sur un intervalle et suite

Pour trop d'élèves, une suite semble être définie sur un intervalle un peu à la manière d'une fonction. Certaines expressions semblent traduire ce genre de confusion :
- . . . . . . *car (u_n) est définie dans l'intervalle $]0, 2[$.*
Dans la copie 1, à l'affirmation : "La suite est donc croissante", un élève réagit en demandant :
- *Dans quel intervalle ?*

1.2.3. Suite et fonction, passage à la limite

Le passage à la limite, extrait de la copie 2, où ℓ représente la limite de (u_n) :

Soit ℓ sa limite.
Alors (u_{n+1}) converge aussi vers ℓ.
Mais $u_{n+1} = \sqrt{2\,u_n}$ et $\lim\limits_{x\to\ell}\sqrt{2x} = \sqrt{2\ell}$, par continuité.
Donc $\lim(\sqrt{2u_n}) = \sqrt{2\ell}$ et (u_{n+1}) converge aussi vers $\sqrt{2\ell}$. Ainsi $\ell = \sqrt{2\ell}$.

pose de nombreuses difficultés de compréhension. L'introduction de la lettre x (conforme aux directives du programme de terminale) ajoute, semble-t-il, à la confusion.

Voici un dialogue entendu dans un groupe :
- *Pourquoi il met $\lim(\sqrt{2u_n}) = \sqrt{2\ell}$?*
- *Tu remplaces x par ℓ.*
- *ℓ c'est la limite.*
- *Quand je lis ces trucs ça m'embrouille, il remplace u_n par x.*
- *Il va trop vite*
- *Avec les suites, ça tend toujours vers ∞. On n'a jamais calculé de suite avec $-\infty$.*
- *Pas beaucoup.*
- *On fait jamais n tend vers $-\infty$.*
- *Tu peux avoir une fonction sur $]0, 2[$ qui tend vers $-\infty$.*

Dans un autre groupe :

- Il faut calculer la limite de $f(x)$ quand x tend vers ∞ pour trouver la limite de la suite.
- Ah non ! ça ne va pas. C'est quand x tend vers 2.

Dans un troisième groupe :
- Pourquoi il fait tendre x vers ℓ et pas vers $+\infty$? Ah ! si d'accord !

1.2.4. Confusion entre n et u_n

On voit déjà dans le dialogue précédent une confusion entre x, u_n, et n. Les deux questions inséparables : “Qui tend vers quoi quand qui tend vers quoi ?” n'apparaissent pas clairement liées. Les notions de limite d'une fonction ou d'une suite et les liens entre les deux notions ne sont pas encore bien compris.
On retrouve cette confusion entre n et u_n dans la récurrence. Quelques élèves corrigent la copie 2 en écrivant :
- Appliquer le principe de récurrence pour $n \in]0,2[$.(2 copies)
- Il manque la conclusion : pour tout $n \in]0,2[$, $u_n \leq 2$.(3 copies du même groupe)

Plusieurs expriment par oral cette même erreur. Ainsi, à propos de $u_0 = 1$:
- Il manque pour $n = 0$, mais $u_0 \in]0,2[$ donc tu peux prendre 0 ou 1.

Dans un autre groupe l'erreur est vite corrigée par le reste du groupe :
- Pourquoi $u_0 = 1$ et dans les deux copies en plus ! Il doit y avoir une raison.
- 1 est le seul entier strictement compris entre 0 et 2.
- Oui, mais c'est n qui est un entier naturel, pas u_n.
- Ah oui !

1.3. Etude de la convergence

1.3.1. Faire une conjecture à partir d'une valeur particulière de u_0

Un tiers des élèves se posent des questions. Certains semblent ne pas comprendre qu'un cas particulier peut servir à établir une conjecture. Ceci peut s'expliquer par le fait qu'ils ne sont pas habitués, en terminale, à discuter selon la valeur de u_0. De plus, dans la copie 1, il y a effectivement une faute puisqu'une conclusion générale est tirée à partir d'un cas particulier.
- Il dit $u_0 = 1$, c'est du pif !
- C'est parce que c'est le milieu de l'intervalle ?

Dans un autre groupe :
- Pourquoi il prend $u_0 = 1$?
- C'est parce que $u_0 \in]0,2[$ et u_0 entier.

1.3.2. Prouver la croissance

Presque tous les élèves commencent par calculer $u_{n+1} - u_n$ ou $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$, en hésitant parfois entre les deux démarches ainsi qu'entre les comparaisons à 0 ou à 1. Certains confondent avec la méthode pour rechercher la nature de la suite où ces démarches correspondent respectivement aux suites arithmétiques et aux suites géométriques.
- On doit étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ ou de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$, ça dépend si la suite est géométrique.
- Pourquoi étudie-t-il $u_{n+1} - u_n$ et pas $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$? Il ne sait pas si c'est arithmétique ou géométrique.

Peu d'élèves manipulent directement les inégalités. Ils ont suivi la méthode proposée dans les copies.
Quelques-uns oublient totalement le “pour tout n”, pensant peut-être que seuls les calculs ont de l'importance. Mais cela peut entraîner une erreur sur le rapport existant entre ce calcul et la définition de “(u_n) croissante” :

- *En calculant $u_{n+1} - u_n$, on trouve toujours quelque chose, ça a toujours un signe, alors toutes les suites sont monotones.*
Ce "théorème" étonnant rendait perplexe l'élève. Mais il ne voyait pas bien où était son erreur.

Certains pensent que, pour prouver la convergence, croissante ne suffit pas et qu'il est nécessaire de prouver strictement croissante.

1.3.3. Notion de majorant

La notion de majorant est un peu floue : certains confondent majorant et maximum.
- *Un majorant ça peut être atteint.*
- *Ce n'est pas forcément atteint.*
- *Est-ce que $u_n < 2$ veut dire que la suite est majorée ? Pour moi, si $u_n \leq 2$, 2 est le majorant et si $u_n < 2$, 2 n'est pas le majorant.*

Dans un autre groupe :
- *Est-ce important que ce soit $<$ ou $\leq$?*
- *Oui, car majorée, c'est par un terme de la suite. Il faut $\leq$.*

1.3.4. Majorant et limite

46% des élèves disent que c'est faux ou font remarquer que la limite n'a pas été calculée.
Mais la moitié des élèves ne voient pas la faute, voire pensent que c'est juste et ne comprennent pas pourquoi dans la copie 2 "on parle de ℓ"
- *S'il a montré qu'elle est croissante et majorée par 2, c'est forcément 2 sa limite ; ça sert à rien son truc avec ℓ.*
Trois élèves unanimes :
- *On a toujours fait : elle est croissante et majorée par 2 donc converge vers 2.*

Cette faute classique est assez naturelle car, pour les suites $u_{n+1} = f(u_n)$, dans la pratique, le majorant "naturel" est toujours la limite, point fixe de f.

1.3.5. Suites convergentes et suites croissantes majorées

70% des élèves remarquent la faute et 43% signalent assez explicitement que le théorème est "à l'envers".
L'argument avancé est souvent :
- *Cette suite convergente est croissante et majorée mais elle peut aussi être décroissante et minorée.*
Cet argument est tout à fait valide mais il laisse planer un petit doute. Les élèves sont-ils bien conscients qu'il existe des suites convergentes qui ne sont ni croissantes majorées, ni décroissantes minorées. C'est l'occasion de refaire le point avec eux sur ce sujet.

1.3.6. Difficulté de comprendre $\ell = f(\ell)$

La rédaction choisie qui semblait être celle conseillée dans les programmes a posé des difficultés de compréhension. Il nous semble qu'il serait préférable de dire quelque chose du genre : "La fonction f étant continue, on peut passer à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = f(u_n)$."
C'est la formulation utilisée par les enseignants du groupe.
- *Pourquoi il fait tendre x vers ℓ et pas vers $+\infty$.*
- *Pour la limite ça a l'air bon. Quoique, c'est la limite de (u_n) que l'on cherche et pas celle de (u_{n+1}).*
- *ℓ ça me gêne.*
- *$\ell = \sqrt{2\ell}$ c'est pas possible. c'est comme 2=3 ...*
- *Ça sert à rien. On a toujours fait croissante et majorée par 2 donc...*
- *D'où sort $\ell = f(\ell)$? C'est n'importe quoi. Ça ne tient pas debout.*
Dans un autre groupe, on retrouve le même genre de difficulté pour l'élève D :

D- ℓ n'est pas égal à $\sqrt{2\ell}$ c'est pas vrai.
C- Ça marche pour $\ell = 2$.
D- Justement, il ne faut pas qu'il fasse une généralité.
C- Il a dit u_{n+1} tend vers ℓ et vers $\sqrt{2\ell}$.
B- Il dit lim $u_{n+1} = \ell = \lim u_n$, c'est bon.
L'élève D est difficile à convaincre.

1.4. Manipuler des inégalités

1.4.1. Comprendre : $u_n < 2$ implique $u_n \leq 2$

Malgré de multiples explications des professeurs, le lien entre inégalité stricte et inégalité large pose toujours autant problème comme le montre la conversation suivante :
- Est-ce que $u_n < 2$ veut dire que la suite est majorée ? Pour moi, si $u_n \leq 2$, 2 est le majorant et si $u_n < 2$, 2 n'est pas le majorant.
- Mais strictement inférieur c'est aussi inférieur ou égal.
- Je ne suis pas d'accord ; si c'est strictement plus petit c'est pas égal. $u_n < 2$, ça veut dire que $u_n = 2$ n'existe pas.
Grande discussion dans le groupe pour savoir si la phrase “si $t > 2$, alors $t \geq 2$” est vraie. Les élèves passent aux intervalles, reviennent aux inégalités, sans vraiment trancher…
- Est-ce important que ce soit $<$ ou $\leq$?
- Oui, car majorée, c'est par un terme de la suite.
- C'est pas une inégalité large pour u_n puisque c'est une inégalité stricte pour u_0. Le raisonnement est donc faux ; on barre toute cette récurrence. (celle pour $u_n \leq 2$)

Cette difficulté peut s'expliquer par le fait que dans le langage courant le “ou” est exclusif : Si une voiture est blanche, on ne dit pas : *cette voiture est blanche ou noire.* Alors qu'en mathématiques, on dit : *1 est inférieur ou égal à 2.*

1.4.2. Ajout d'étapes intermédiaires pour : “$u_n < 2$ donc $u_{n+1} < 2$.”

La moitié des élèves trouvent ce passage trop rapide. Ils auraient préféré :
- $0 < u_n < 2$ donc $0 < 2u_n < 4$ puis $0 < \sqrt{2u_n} < \sqrt{4}$ car la fonction racine carrée est strictement croissante.
Ce fait d'avancer prudemment dans les inégalités est plutôt positif car il peut permettre d'éviter des erreurs (cf chapitre VI).

1.5. Manipuler des racines carrées

Notre observation a mis en évidence de nombreuses difficultés sur la fonction réelle racine carrée, déjà observées dans la fiche “résolution d'équations”.

1.5.1. Produit de racines : $\sqrt{2u_n} = \sqrt{2}\sqrt{u_n}$

Cette égalité a été mise en doute par plusieurs élèves qui ont utilisé la calculatrice pour lever le doute :
- $\sqrt{6} = \sqrt{2}\sqrt{3}$. Ça marche !
Cette difficulté, connue des enseignants du lycée, a étonné les enseignants de l'université.

1.5.2. Extraction de racine : $u_n \geq 0$

Les élèves confondent deux choses :

– Le fait que l'on définit seulement la racine carrée d'un nombre positif
– Le fait que, par convention, parmi les deux racines carrées d'un nombre positif, pour définir la fonction racine carrée, on choisit celle qui est positive.

Dans un groupe :
- *On ne dit pas que* u_n *est positif.*
- *Tu dois chercher le signe si* $u_n < 0$ *ça pose problème.*
- u_n *ne peut être négatif puisque tu prends sa racine.*
- *Si tu prends* $\sqrt{-2}$.
- *C'est obligatoirement positif.*
- $u_n > 0$ *car* $u_n = \sqrt{\ }$.

Dans un autre groupe :
- *Car* $\sqrt{u_n} > 0$.
- *Pourquoi c'est toujours positif ?*
- *Car* $\sqrt{\ }$ *est croissante sur* $\mathbb{R}^+$.
- *Elle peut être croissante et négative.*

Dans un autre groupe :
- $\sqrt{4}$ *c'est 2 ou* -2. *Il conclut trop vite.*

Dans un autre groupe :
- *Mais, imagine* $u_n < 0$, *on ne peut pas mettre* $\sqrt{u_n}$ *?*
- *Ah, mais si ,* u_n *est positif, sinon on n'écrirait pas* $\sqrt{2u_n}$ *pour calculer* u_{n+1}.
- *Il faudrait quand même prouver que* u_n *est toujours positif.*
- *Le calcul me gêne.*
- *Si, il est bon car* $\sqrt{u_n}\sqrt{u_n} = u_n$.
- *Finalement si, le calcul est bon si l'on rajoute* $u_n > 0$, *à moins que ce ne soit* $u_n \geq 0$ *?*

Dans un autre groupe :
- *Oui, mais si on détaille, on arrive à* $\sqrt{0}$ *qui n'existe pas.*
- *Tu es sûre ? Regarde sur la calculatrice.*
- *Ah si ! Ça fait 0.*

Voici encore une correction écrite sur les copies :
-$\sqrt{u_n} > 0$ *car* $u_n > 0$.

Tout ceci montre qu'une certaine confusion règne au sujet de la fonction racine carrée.

1.6. L'équivalence : "Or $\sqrt{2} \geq \sqrt{u_n} \iff 2 \geq u_n$"

Cette phrase, avec le "or" portant sur l'équivalence, a posé des problèmes à de nombreux élèves. La signification du symbole $\iff$ et la différence entre implication et équivalence ne sont pas claires pour les élèves.
La moitié d'entre eux réclament que l'équivalence soit justifiée par la croissance du carré ou de la racine carrée sur $\mathbb{R}^+$. Ceci est conforme aux exigences de terminale puisque, pour une fonction strictement monotone sur un intervalle de $\mathbb{R}$, on a bien l'équivalence. Certains oublient de mentionner sur $\mathbb{R}^+$.
Relevons quelques phrases dites ou écrites pour ce passage. Dans un groupe :

- *Dans ce cas, on ne met pas "or". "Or" cela veut dire que c'est vrai, mais on ne sait pas si* $\sqrt{2} \geq \sqrt{u_n}$.
- *On ne sait pas, mais par contre l'équivalence est vraie.*
- *L'équivalence est vraie si l'un des termes est vrai.*
- *L'équivalence est vraie mais le premier terme n'est pas prouvé.*
- *Il n'a pas le droit de mettre* $\iff$ *parce qu'il dit "il semble".*
Réponse : Si ! Car il voit sur la courbe et après il démontre".

Un autre groupe :
- *"*$\iff$*" ne sert à rien.*
- *Or* $\sqrt{2} \geq \sqrt{u_n}$. *Pourquoi ?*
- *Il aurait fallu dire qu'il élève au carré et que* x^2 *est croissante.*

La dernière phrase, plusieurs fois entendue, même si elle est acceptée comme justification en terminale, relève plutôt du vocabulaire de l'implication. De plus, pour cette démonstration, c'est la croissance de la fonction racine carrée qui est utile.

1.7. Simplification par ℓ, $\ell \neq 0$?

Un tiers des élèves voient le problème et même, certains, trouvent une explication :

- *Il a oublié* $\ell = 0$.

- *C'est faux. Il a divisé par* ℓ *sans savoir* $\ell \neq 0$.
- *Mais la suite est croissante et minorée par 1, donc* $\ell \neq 0$.

- *Est-ce que tu as le droit de diviser par* ℓ *?*
- *Elle croît donc on a le droit.*

Mais la majorité des élèves ne se posent aucune question. Cette erreur se rencontre encore fréquemment à l'université.

2. Analyse de cette expérience

Analysons maintenant les acquis et les difficultés des élèves, en particulier, ce qui peut poser problème pour la continuation dans l'enseignement supérieur. Regardons comment l'expérimentation nous a permis d'améliorer cette activité.

2.1. Les acquis des élèves et quelques suggestions

2.1.1. Le raisonnement par récurrence

Un aspect positif de cette correction de copies par les élèves est leur bonne performance pour analyser les défauts concernant la récurrence.
On voit que la majorité des élèves a bien compris qu'il y a trois étapes dans une récurrence. La mise en évidence assez systématique par les professeurs de ces trois étapes dans l'écriture des récurrences en terminale permet cette acquisition. Il serait sans doute judicieux de démarrer la récurrence à l'université en reprenant avec la même insistance et le même vocabulaire, la mise en évidence de ces étapes :

– Initialisation : Pour $n = n_0$, ...
– Hérédité : Supposons que pour un $n \geq n_0$ quelconque, on ait . . . , alors . . .
– Conclusion : Pour tout entier $n \geq n_0$, on a . . .

Pour rendre plus clair la démonstration il est souvent utile de se donner une notation pour la proposition à démontrer : $P(n)$. Cela peut aider les élèves, pour l'hérédité, à mieux voir le passage de n à $n + 1$ dans la totalité de la proposition à démontrer.
Voici un exemple caractéristique d'erreur : dans le sujet du bac 2004, on demandait de prouver par récurrence que la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$ vérifie $\forall n \geq 0,\ u_n \geq n^2$. De nombreux élèves ont écrit qu'il fallait démontrer à l'ordre $n + 1$:

$$u_{n+1} \geq n^2,$$

proposition vraie mais pas celle qu'il fallait démontrer. La moitié des occurrences de n dans la proposition n'a pas été remplacée par $n + 1$.
Au cours de l'élaboration de la fiche, une discussion s'est engagée sur le fait d'utiliser une lettre différente, p par exemple au lieu de n, pour l'hérédité. Cette pratique, courante dans les lycées et proposée dans le polycopié de première année à l'université, ne paraît pas essentielle aux enseignants de lycée de notre groupe.
Cependant, quand il s'agit de faire des récurrences sur des expressions du genre $\Sigma_{p=1}^{n} \ldots$ les étudiants de première année rencontrent des difficultés, difficultés liées en partie à une

mauvaise compréhension du signe Σ, mais aussi au fait que l'expression que l'on manipule comporte déjà deux lettres.

2.1.2. Etudier la croissance d'une suite

Pour montrer la croissance d'une suite, la majorité pensent à calculer $u_{n+1} - u_n$, ce qui est souvent une méthode efficace et elle était utilisée dans la copie 2. Mais il est prudent de rappeler aux élèves et étudiants qu'il y a de nombreuses méthodes pour étudier la monotonie :
- étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.
- comparer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ avec 1.
- comparer u_1 et u_0 et continuer avec une récurrence.
- comparer directement u_{n+1} à u_n en manipulant des inégalités.
- étudier les variations de f pour les suites $u_n = f(n)$.
- ......

Cependant, il faut insister sur le fait que les différentes méthodes, pour étudier la monotonie, sont plus ou moins appropriées selon la suite considérée.

2.1.3. Le théorème des suites monotones bornées

Dans l'ensemble, ils savent que les suites croissantes majorées ou décroissantes minorées sont convergentes. Mais il faut sans doute insister sur le fait qu'il n'y a pas de réciproque, que des suites peuvent converger sans être croissantes majorées ou décroissantes minorées.

2.1.4. Utilisation du dessin pour les suites $u_{n+1} = f(u_n)$

Les élèves interrogés sur la manière d'utiliser le dessin pour conjecturer le comportement de la suite dans la copie 2 semblent avoir parfaitement compris le principe. Cette démarche ne pose pas non plus de problème en première année d'université, alors qu'il y a quelques années de nombreux étudiants avaient des difficultés à comprendre l'utilisation du dessin. Cette amélioration est sans doute due au changement de programme en terminale qui, actuellement, met bien en évidence cette démarche.

2.2. Les difficultés : causes et remèdes

2.2.1. Faire une hypothèse auxiliaire, supposer

Supposer quelque chose dans une démonstration est une démarche que l'on rencontre, par exemple, dans la démonstration d'énoncé du type *si ... alors ...* ou dans le raisonnement par l'absurde. Le vocabulaire utilisé pour la supposition est souvent : “si......”. Le mot “supposons” est sans doute moins fréquent. Ceci explique peut-être les interrogations de certains élèves. On a vu que pour la récurrence, plusieurs élèves mettent en doute “le droit de supposer”, quand on fait une démonstration.
La difficulté de supposer quelque chose que l'on ne sait pas, dans une démonstration, ici dans le raisonnement par récurrence, se rencontre déjà au collège dans le raisonnement par l'absurde. Pour démontrer qu'un triangle n'est pas rectangle, si l'on ne veut pas utiliser la contraposée du théorème de Pythagore, on dit :
“ Si (ou supposons) le triangle était rectangle, on aurait ......” .
Voici la réaction d'un élève de quatrième à cette démonstration :
- il suppose, mais il ne le sait pas.
(Voir “La démonstration au collège. Quelles tâches ? Quels outils ?”, polycopié 2004 de l'IREM de Rennes)

2.2.2. Pour tout n

Certains prêtent peu attention ou ne voient pas l'importance du “pour tout n” et de sa position dans la phrase.
Cela conduit à des erreurs graves comme on l'a vu pour la croissance d'une suite :
- *En calculant* $u_{n+1} - u_n$*, on trouve toujours quelque chose, ça a toujours un signe, alors toutes les suites sont monotones.*

On voit aussi cette difficulté pour l'hérédité dans la récurrence. Certains hésitent entre deux rédactions :
- *Pour un* n *quelconque, démontrons que* $P(n)$ *implique* $P(n+1)$.
- *Supposons* $P(n)$*, pour tout* n *et démontrons* $P(n+1)$.

En langage formalisé, les propositions diffèrent par le parenthésage :
- $(\forall n \geq 0)(P(n) \Longrightarrow P(n+1))$
- $(\forall n \geq 0,\ P(n)) \Longrightarrow P(n+1)$:
La première proposition est correcte ; elle traduit l'hérédité. Par contre, la deuxième proposition est incorrecte et n'a pas grand sens, puisque la lettre n dans $P(n+1)$ n'a a priori rien à voir avec le n précédent enfermé dans sa parenthèse. Dans l'esprit des élèves, la signification de cette phrase ne peut être claire. Ils pensent peut-être dire

$$(\forall n \geq 0,\ P(n)) \Longrightarrow (\forall n \geq 0,\ P(n+1))$$

ce qui est une évidence, donc sans aucun intérêt. On retrouve fréquemment cette erreur aussi à l'université.

2.2.3. Implication ou équivalence ?

Dans la copie 2, la phrase :

“Or $\sqrt{2} \geq \sqrt{u_n} \Longleftrightarrow 2 \geq u_n$”

avec le “or” portant sur l'équivalence, a posé problème à plusieurs élèves. Cette difficulté est d'autant plus grande que la signification de $\Longleftrightarrow$ n'est pas maîtrisée. Le signe $\Longleftrightarrow$ est souvent utilisé par les élèves, comme un “outil de calcul” dans la résolution d'équations. Cependant certains élèves ont plutôt pensé à une implication mais pas dans le sens utile pour cette démonstration.
Pour prouver que (u_n) est croissante, l'équivalence ci-dessus n'est pas indispensable. Seule l'implication

$$(2 \geq u_n \Longrightarrow \sqrt{2} \geq \sqrt{u_n})$$

est utile. Mais, pour la démarche choisie dans la démonstration (rechercher à quelle condition $u_{n+1} - u_n > 0$), une équivalence convient mieux. Pour utiliser seulement l'implication on aurait pu dire :
Etant donné que $\sqrt{u_n} > 0$, $u_{n+1} - u_n$ est du signe de $\sqrt{2} - \sqrt{u_n}$. Comme la fonction racine carrée est croissante, pour prouver $\sqrt{2} \geq \sqrt{u_n}$, il suffit de vérifier que $2 \geq u_n$.
La moitié des élèves réclament que l'équivalence soit justifiée soit par la croissance du carré, soit par la croissance de la racine carrée sur $\mathbb{R}^+$. Ces deux justifications sont bonnes, puisque la fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
En effet, soit f une fonction à valeurs réelles, strictement croissante sur un intervalle I. En utilisant le fait que $\mathbb{R}$ est un ensemble totalement ordonné, on vérifie facilement que pour tout x et y dans l'intervalle I, les propositions :

$$P_1 \ :\ (x \geq y \Longleftrightarrow f(x) \geq f(y))$$

et

$$P_2 \ :\ (x \geq y \Longrightarrow f(x) \geq f(y))$$

sont équivalentes.

En effet, pour démontrer $P_2 \Longrightarrow P_1$, supposons P_2 et démontrons

$$f(x) \geq f(y) \Longrightarrow x \geq y.$$

Raisonnons par l'absurde : si $(f(x) \geq f(y))$ est vrai et $(x \geq y)$ est fausse, on a $x < y$. (c'est à cet endroit que sert le fait que $\mathbb{R}$ est totalement ordonné).
En utilisant le fait que la fonction f est strictement croissante, on aboutit à une contradiction : $f(x) < f(y)$. Ce qui démontre P_1.
On remarquera que la continuité n'est pas utile dans cette démonstration. C'est un résultat plus simple que le théorème de la bijection.

Lorsque l'on aborde les fonctions sur des ensembles non totalement ordonnés, comme l'ensemble des parties d'un ensemble, à l'université, la monotonie ne signifie plus qu'une implication.
Les fonctions monotones sont peut-être une occasion d'aborder l'implication en terminale car la différence entre implication et équivalence ne semble pas claire dans la tête des élèves.
Les tournures fréquemment utilisées par les élèves, pour justifier l'équivalence, paraissent plutôt adaptées à justifier une implication :
- *Il aurait fallu dire qu'il élève au carré et que $x \mapsto x^2$ est croissante.*
Le fait de bien comprendre une équivalence comme une double implication est fondamentale pour aborder sans problèmes des démonstrations plus complexes à l'université.

2.2.4. Sauter des étapes, démarrer en analysant ce que l'on veut démontrer

Les élèves sont habitués à des démonstrations détaillées, écrites "dans l'ordre". Ils ne veulent pas sauter d'étape de calcul dans la manipulation d'inégalités. C'est une sage prudence.
Un passage a posé des problèmes de compréhension à beaucoup d'élèves : après avoir étudié le signe de $u_{n+1} - u_n$, en se ramenant à la démonstration de $u_n \leq 2$, on conclut directement la démonstration par : "La suite (u_n) est donc croissante et majorée."
Ils ont de la peine à rétablir les étapes de la démonstration. Un tiers des élèves réclament un rappel de $u_{n+1} - u_n > 0$ ou même, pensent que la démonstration n'est pas faite. Par oral, il y a de nombreuses questions sur ce passage :
- *Il montre que c'est majoré, mais pas la croissance.*
- *Si, si. En fait, il l'a fait à l'envers. La majoration donne la monotonie.*
- *C'est la conclusion que je trouve louche ; il a pas prouvé croissant.*
- *Il conclut croissante alors qu'il vient de montrer majorée.*
- *Si ! il l'a prouvé par le signe.*
- *Ah oui ! je suis bête !*

Il faut dire que la rédaction choisie ne facilitait pas l'analyse puisque la conclusion "majorée" se déduisait directement de la ligne précédente alors que la conclusion "croissante" nécessitait une synthèse des six lignes précédentes.
En terminale, les élèves ne maîtrisent pas encore tous un texte long de démonstration. Ils ont des difficultés à faire une synthèse de ce que l'on vient de démontrer si un rappel n'est pas fait explicitement. C'est peut-être une difficulté pour comprendre des démonstrations à l'université où cette pratique (annoncer au début ce que l'on va démontrer et ne pas le rappeler par la suite) est assez fréquente.

2.3. Nos maladresses de rédaction

Après cette correction de copies par les élèves nous avons fait notre auto-critique sur l'activité :
Le texte est un énoncé standard de lycée. L'expression :
"la suite définie par u_0 dans l'intervalle $]0, 2[$ et la relation de récurrence...",
présente une ambiguité pour certains puisque, rigoureusement, il faut vérifier que l'on définit bien ainsi u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour éviter cette ambiguité on pourrait écrire :

Soit u_0 dans l'intervalle $]0,2[$. Montrer que la relation $u_{n+1} = \sqrt{2\,u_n}$ permet de définir la suite (u_n) par récurrence.

Cependant, cette rédaction est courante dans les énoncés que ce soit au lycée ou à l'université et ne semble pas poser de problème ni aux enseignants, ni aux élèves.

Il aurait été préférable de prendre des vraies copies d'élèves car la rédaction aurait été plus proche de la rédaction en terminale. D'autre part, la volonté d'introduire certaines erreurs amène parfois à donner une rédaction peu naturelle.

Dans la copie 2, la phrase :
" Or $\sqrt{2} \geq \sqrt{u_n} \Longleftrightarrow 2 \geq u_n$"
avec le "or" portant sur l'équivalence, a posé problème à certains élèves car ils pensent que le or porte sur la première inégalité (cf 6 et 8.2.3).
Notre formulation n'était pas très bonne, avec le mélange de texte et de formule. Il aurait été préférable d'écrire :
"Or on a l'équivalence :

$$\sqrt{2} \geq \sqrt{u_n} \Longleftrightarrow 2 \geq u_n."$$

Notre rédaction n'était pas aussi détaillée qu'une rédaction standard d'élèves de terminale. Dans les deux copies, le passage de $u_n < 2$ à $u_{n+1} < 2$ aurait été très probablement plus détaillé. Dans la copie 2 la conclusion : "La suite (u_n) est donc croissante" est trop rapide. Nous aurions du rappeler : "Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leq 2$ et donc, d'après ce qui précède $u_{n+1} - u_n > 0$."

Cette expérience nous a montré, notamment en comparant nos corrigés, que la rédaction en terminale est beaucoup moins "littéraire" qu'à l'université.
L'usage de raisonnement par équivalence ou en utilisant le signe $\Longleftrightarrow$ a donné lieu à de nombreux débat. Dans le groupe, certains sont partisans de l'apprentissage du bon usage des $\Longleftrightarrow$ qui facilite certaines rédactions de démonstration. D'autres préfèrent la double implication, certes moins rapide dans les situations simples, en terminale, mais tellement moins risquée dans des démonstrations plus complexes.

On trouvera en annexe X une version modifiée de cette activité. Cette activité peut être réalisée en une heure en terminale S, en mettant les élèves par petits groupes (3 ou 4) et en les laissant discuter librement. Les élèves ont beaucoup discuté, parfois passionnément, se corrigeant mutuellement. Cette séance doit être suivie d'une mise au point sur les erreurs.

Annexe IX

Trouver les erreurs

Voici deux copies d'élèves pour un problème sur les suites récurrentes. Corrigez ces copies en rouge en barrant ce qui est faux et en donnant pour les passages faux ou incomplets,

- soit une explication au fait que cela soit faux
- soit des indications pour trouver la bonne solution
- soit la bonne réponse

afin que l'élève en relisant sa copie soit capable de rédiger une solution correcte au problème et de comprendre ses erreurs.

Problème

Considérons la suite (u_n) définie par u_0 dans l'intervalle $]0,2[$ et, pour tout entier naturel n, la relation de récurrence $u_{n+1} = \sqrt{2\,u_n}$.
La suite est-elle monotone ?
Est-elle convergente ? Si oui, déterminer sa limite.

Copie 1

Pour voir ce qui se passe, calculons approximativement les premiers termes de la suite pour $u_0 = 1$.

On a $u_1 \simeq 1,4$, $u_2 \simeq 1,7$, $u_3 \simeq 1,8$, $u_4 \simeq 1,91$, $u_5 \simeq 1,95$, $u_6 \simeq 1,97\ldots$

La suite est donc croissante car $u_0 < u_1 < u_2 < u_3 < \ldots$
De plus, si $u_n < 2$, alors $u_{n+1} < \sqrt{4}$ car la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

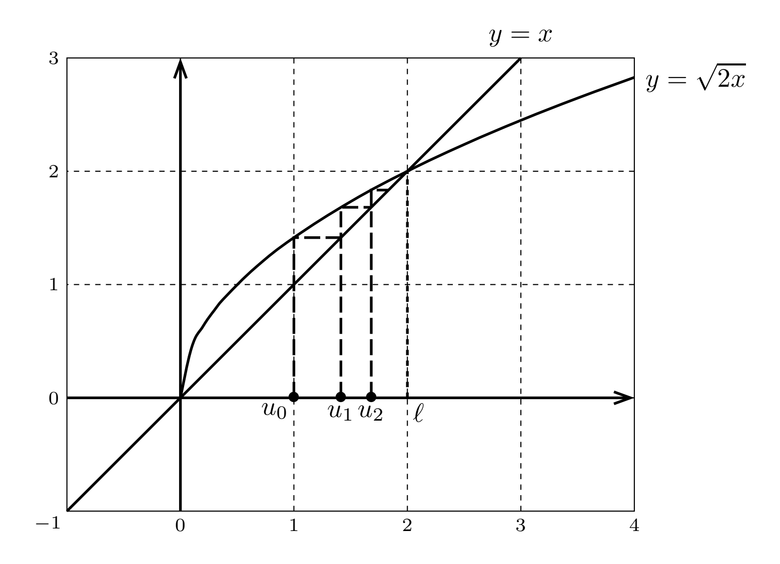
Ainsi la suite (u_n) est croissante et majorée par 2, donc elle converge vers son majorant 2.

Copie 2

La suite proposée est donnée par

$$u_{n+1} = f(u_n) \text{ avec } f(x) = \sqrt{2x}.$$

Dessinons la courbe représentative de la fonction $f(x)$, la droite $y = x$ et les premiers termes de la suite pour $u_0 = 1$



D'après le graphique, il semble que (u_n) soit croissante et majorée par 2.
Or $u_{n+1} - u_n = \sqrt{2u_n} - u_n = \sqrt{u_n}(\sqrt{2} - \sqrt{u_n})$.
Donc $u_{n+1} - u_n$ est du signe de $\sqrt{2} - \sqrt{u_n}$.
Or $\sqrt{2} \geq \sqrt{u_n} \Longleftrightarrow 2 \geq u_n$.
Montrons par récurrence que $u_n \leq 2$.
Supposons $u_n \leq 2$, alors $\sqrt{2u_n} \leq \sqrt{4}$, c'est-à-dire $u_{n+1} \leq 2$. La suite est donc croissante et majorée par 2.
La suite (u_n) est donc convergente car toute suite convergente est croissante et majorée.
Soit ℓ sa limite.
On a $u_{n+1} = \sqrt{2\,u_n}$ et $\lim\limits_{x \to \ell} \sqrt{2x} = \sqrt{2\ell}$, par continuité.
Donc $\lim(\sqrt{2u_n}) = \sqrt{2\ell}$. D'où (u_{n+1}) converge vers $\sqrt{2\ell}$.
Mais (u_{n+1}) converge aussi vers ℓ. Ainsi $\ell = \sqrt{2\ell}$, c'est-à-dire $\ell^2 = 2\ell$.
Donc $\ell = 2$.
Ce qui démontre que (u_n) tend vers 2.

Annexe X

Trouver les erreurs

Voici deux copies d'élèves pour un problème sur les suites récurrentes. Corrigez ces copies en rouge en barrant ce qui est faux et en donnant pour les passages faux ou incomplets,

- soit une explication au fait que cela soit faux
- soit des indications pour trouver la bonne solution
- soit la bonne réponse

afin que l'élève en relisant sa copie soit capable de rédiger une solution correcte au problème et de comprendre ses erreurs.

Problème

Considérons la suite (u_n) définie par u_0 dans l'intervalle $]0, 2[$ et, pour tout entier naturel n, la relation de récurrence $u_{n+1} = \sqrt{2\,u_n}$.
La suite est-elle monotone ?
Est-elle convergente ? Si oui, déterminer sa limite.

Copie 1

Pour voir ce qui se passe, calculons approximativement les premiers termes de la suite pour $u_0 = 1$.

On a $u_1 \simeq 1,4$, $u_2 \simeq 1,7$, $u_3 \simeq 1,8$, $u_4 \simeq 1,91$, $u_5 \simeq 1,95$, $u_6 \simeq 1,97\ldots$

La suite est donc croissante car $u_0 < u_1 < u_2 < u_3 < \ldots$
De plus, si $u_n < 2$, alors $u_{n+1} < \sqrt{4}$ car la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

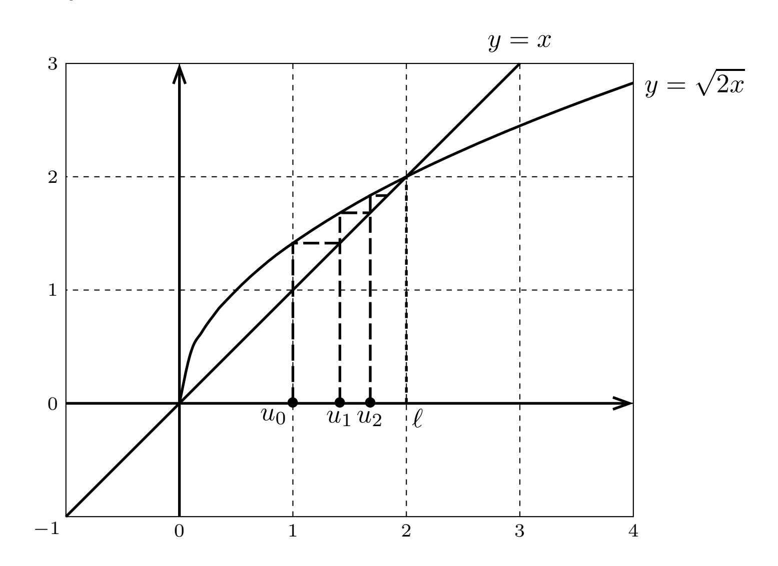
Ainsi la suite (u_n) est croissante et majorée par 2, donc elle converge vers son majorant 2.

Copie 2

La suite proposée est donnée par

$$u_{n+1} = f(u_n) \text{ avec } f(x) = \sqrt{2x}.$$

Dessinons la courbe représentative de la fonction $f(x)$, la droite $y = x$ et les premiers termes de la suite pour $u_0 = 1$



D'après le graphique, il semble que (u_n) soit croissante et majorée par 2.
Or $u_{n+1} - u_n = \sqrt{2u_n} - u_n = \sqrt{u_n}(\sqrt{2} - \sqrt{u_n})$.
Donc $u_{n+1} - u_n$ est du signe de $\sqrt{2} - \sqrt{u_n}$.
Or on a l'équivalence :
$\sqrt{2} \geq \sqrt{u_n} \Longleftrightarrow 2 \geq u_n$.
Montrons par récurrence que $u_n \leq 2$.
Supposons $u_n \leq 2$, alors $\sqrt{2u_n} \leq \sqrt{4}$, c'est-à-dire $u_{n+1} \leq 2$.
Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leq 2$ et, donc, d'après ce qui précéde $u_{n+1} - u_n \geq 0$. La suite est donc croissante et majorée par 2.
La suite (u_n) est donc convergente car toute suite convergente est croissante et majorée.
Soit ℓ sa limite.
On a $u_{n+1} = \sqrt{2\,u_n}$ et $\lim\limits_{x \to \ell} \sqrt{2x} = \sqrt{2\ell}$, par continuité.
Donc $\lim(\sqrt{2u_n}) = \sqrt{2\ell}$. D'où (u_{n+1}) converge vers $\sqrt{2\ell}$.
Mais (u_{n+1}) converge aussi vers ℓ. Ainsi $\ell = \sqrt{2\ell}$, c'est-à-dire $\ell^2 = 2\ell$.
Donc $\ell = 2$.
Ce qui démontre que (u_n) tend vers 2.

Conclusion et perspectives

Notre travail a d'abord porté sur un état des lieux, en comparant nos programmes, nos documents d'enseignements, les capacités de nos élèves et de nos étudiants à bien comprendre une démonstration, à utiliser le mot juste pour s'exprimer en mathématiques.
Cet état des lieux est instructif. Par exemple, dans l'étude des manuels, on a remarqué que le vocabulaire utilisé fréquemment pour introduire une définition est : “On dit que...... si ...”. Ce vocabulaire, très proche de celui de l'implication, ne met pas en évidence le fait qu'une définition est une équivalence. Dans le même style, des expressions comme : “On dit que...... quand ...” ou “On dit que...... lorsque ...”, nous semblent déjà préférables. Seuls, quelques auteurs utilisent un langage plus proche de celui de l'équivalence en employant la tournure qui nous semble la meilleure : “Dire que ...... signifie que”.

On a vu, sur les tests de vocabulaire sur l'implication, combien le choix du mot juste, dans le contexte d'une démonstration, est d'autant plus difficile que les propositions concernées sont équivalentes et qu'il faut choisir le sens de l'implication utile pour justifier la démonstration. Mais aussi, on a pu constater les difficultés des étudiants ou des lycéens à manipuler les rédactions “inversées” de l'implication utilisant les mots *car, puisque, en effet, il suffit*....

La résolution des équations avec radicaux a montré les difficultés, même pour de “bons” étudiants, à comprendre l'utilité de la vérification.
La variété des solutions proposées par les membres du groupe est également très intéressante pour la diversification des pratiques.
Le débat a mis en évidence l'utilité pédagogique de l'étude préalable de “l'ensemble de définition de l'équation”.
On a vu aussi la difficulté de bien faire comprendre ce que signifie un raisonnement par équivalence et l'intérêt de mettre en garde les élèves très tôt sur les risques d'erreurs dans ce type de raisonnement, risques encore plus grands au niveau de l'enseignement supérieur, dès que l'on aborde un chapitre où les démonstrations se compliquent un tout petit peu : analyse fine ou algèbre linéaire, par exemple. D'où l'utilité de travailler, de temps à autre au lycée, sur des situations, comme celle de notre équation avec radical, où une démonstration par équivalence est très délicate.

Dans le supérieur, particulièrement en analyse, l'usage des quantificateurs devient primordial. Notre fiche “Tous pour un, un pour tous” sur le thème de l'inversion des quantificateurs, uitlisant des domaines connus au lycée dès la 1ère, comme la définition de la période d'une fonction, a pour but d'améliorer la compréhension de la signification de l'inversion des quantificateurs, en partant de la différence, comprise de tous, entre un passe-partout et une clef ordinaire. (voir annexe VI du chapitre 5). Les élèves n'ont pas tous vu la similitude de structure entre les différents énoncés. Il faudrait sans doute améliorer la fiche en trouvant un moyen de souligner davantage cette similitude.

Une autre piste de recherche à propos des quantificateurs est de remédier à l'erreur fréquente, au lycée comme à l'université, qui consiste à penser que pour démontrer “pour tout ...”, il suffit d'avoir étudié “suffisamment” de cas particuliers.

Les inégalités font aussi partie des difficultés importantes au début des cours d'analyse à l'université. Bien que ce thème soit abordé dès le collège, les difficultés persistent jusqu'à la fin des études universitaires. Les deux fiches réalisées respectivement pour le lycée et l'université peuvent être un bon moyen de faire travailler les élèves sur ce thème.

La dernière activité, “Trouver les erreurs”, a encore montré la difficulté à comprendre le sens du “ou” dans l'inégalité large : $\leq$.
Cette activité nous a aussi apporté beaucoup d'informations sur les questions que se posent les élèves de terminale sur les suites. On voit que le concept de suites n'est pas encore intégré.

Ces nombreux échanges entre collègues du lycée et de l'université ont été très fructueux. Ils ont permis aux universitaires de dire aux professeurs de terminales les principales difficultés rencontrées à l'entrée de l'université :

- Passage des démonstrations par équivalence, dans des situations assez simples, au lycée, à des démonstrations plus complexes nécessitant une double implication à l'université ;
- Erreurs sur le sens de l'implication ;
- Difficulté à écrire et à comprendre des rédactions de démonstration variées, en particulier une structure autre que "hypothèse, donc conclusion" , par exemple une structure inversée utilisant des mots comme "*car, en effet, puisque, il suffit* ;
- Manipulation de quantificateurs, que ce soit sous forme textuelle ou symbolique ;
- Manipulation d'inégalités d'encadrement et pas seulement de comparaison à zéro ;

Les universitaires ont pris conscience de difficultés qu'ils ne soupçonnaient pas telles que

- les confusions à propos de la fonction racine carrée entre le fait que le domaine de définition soit $\mathbb{R}^+$ et le fait que la racine carrée soit positive ;
- la mauvaise perception de ce qu'est une suite, en particulier, confusion entre n et u_n et même, confusion avec les fonctions (mieux maîtrisées que les suites en terminale).
- l'oubli total pour certains du "pour tout", par exemple le "pour tout n" dans la monotonie d'une suite.

Ces observations peuvent contribuer à faire converger les pratiques des enseignants des lycées et des universités.
Les groupes de travail de l'IREM peuvent faciliter aussi une meilleure prise en compte de l'évolution des programmes au lycée et à l'université.
Mais, pour être efficace, ce travail devrait être permanent et diffusé plus largement. En effet les évolutions sont fréquentes et l'information circule peu. Par exemple, les nombreuses modifications, ces dernières années, de la présentation de la continuité au lycée n'a pas beaucoup fait changer la manière d'aborder le sujet à l'université.

Bibliographie

Publications IREM

- Rédaction et niveaux de rigueur en mathématiques, *IREM de Toulouse, Octobre 1999*
- Algèbre linéaire : du lycée à la fac, *IREM de Rennes, 1999*
- Preuve et démonstration : quelques questions essentielles, *IREM de Rennes, 2001*
- La démonstration au collège. Quelles tâches ? Quels outils ?, *IREM de Rennes, 2004*

Articles

- A. Robert, Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université, *Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol 18, n°, pp. 139-190, 1998*
- R. Duval, Ecriture, raisonnement et découverte de la démonstration en mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol 20, n° 2, pp. 295-340, 2003*
- V. Durand-Guerrier, G. Arsac, Méthodes de raisonnement et leurs modélisations logiques. Spécificité de l'analyse. Quelles implications didactiques ? *Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol 23, n° 3, pp. 295-340, 2003*
- A. Paugam, Difficultés liées à la présence de quantificateurs dans les démonstrations, *Actes du séminaire de didactique de mathématiques de l'université de Rennes 1, DidMar, 2001-2002*

Livres

- La démonstration : écrire des mathématiques au collège et au lycée, I. Giorgiutti, D. Hilt, J. Houdebine, M.A. Juhel, J. Julo, G. Mouraud, *Pédagogie pour demain, Hachette Education, 1998*
- Produire et lire des textes de démonstration, E. Barbin, R. Duval, I. Giorgiutti, J. Houdebine, C. Laborde, *Ellipses, 2001*
- L'enseignement des mathématiques du collège au premier cycle de l'Université, *IUFM de Lorraine - Site de Metz, 8-9-10 octobre 2003*

Sites

- Liaison lycée-université :
  http ://mathematiques.ac-bordeaux.fr/peda/sup/lyc_sup.htm
- Quelques éléments de logique mathématique :
  http ://www.univ-orleans.fr/SUFFO/IREM/pedagogie/post-bac/index.php
- Notre groupe :
  http ://www.irem.univ-rennes1.fr/recherches/groupes/groupe_term_fac/index.htm

Livres de cours (parmi d'autres...)

- Maths 4e, Collection cinq sur cinq, Editeur Hachette Education
- Maths 3e, Collection cinq sur cinq, Editeur Hachette Education
- 2de, Collection Transmath, Editeur Nathan
- 1^{re}S, Collection Transmath, Editeur Nathan
- Term S, Collection Transmath, Editeur Nathan
- Mathématiques TS, Bréal
- Term S, Collection fractale, Editeur Bordas
- F. Liret, D. Martinais, analyse 1ère année, Deug MIAS, MASS et SM, *Dunod*
- J.M. Monier, analyse 1, 1ère année, MPSI, PCSI, PTSI, *Dunod*

TABLE DES MATIERES